Konstruktion des Gini-Koeffizienten

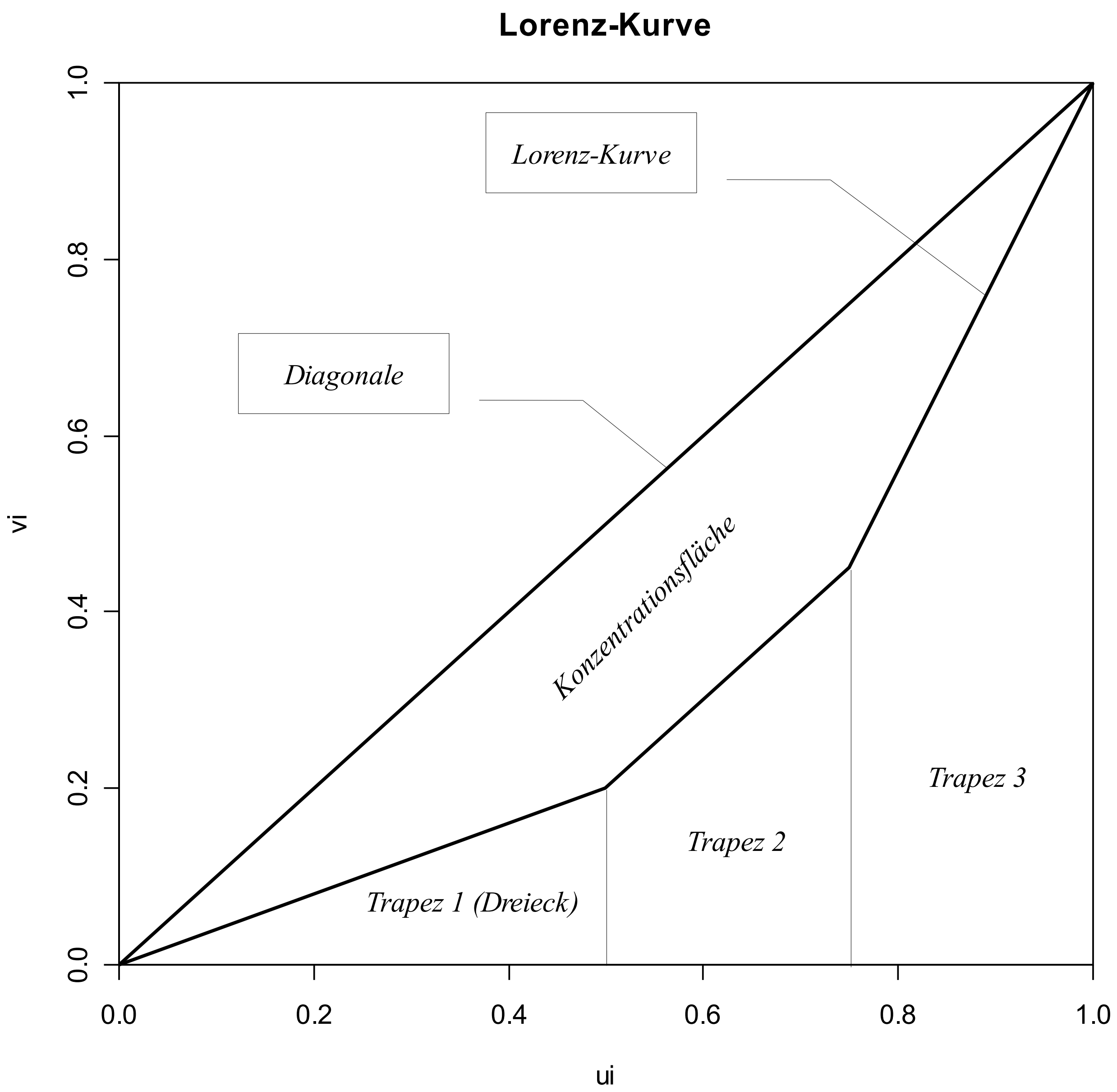
Der Gini-Koeffizient ist definiert als die Konzentrationfläche relativ zur Fläche unter der Diagonalen. Die Konzentrationsfläche ist die Fläche zwischen Lorenz-Kurve und der Diagonalen. Man kann diese Definition folgendermaßen umformen:

$$G = \frac{Konzentrationfläche}{Fläche\ unter\ der\ Diagonalen}$$

$$= \frac{Fläche\ unter\ der\ Diagonalen - Fläche\ unter\ der\ Kurve}{Fläche\ unter\ der\ Diagonalen}$$

$$= \frac{0{,}5 - Fläche\ unter\ der\ Kurve}{0{,}5}$$

$$G = 1 - 2 \cdot Fläche\ unter\ der\ Kurve \quad (1)$$



Wenn man nun die Fläche unterhalb der Lorenz-Kurve berechnen will, benötigt man dazu die Formel zur Flächenberechnung eines Trapezes:

$$A = m \cdot h \quad (2)$$

Zur Erklärung habe ich beispielhaft eines der Trapeze („Trapez 2“) oben aus der Grafik genommen:

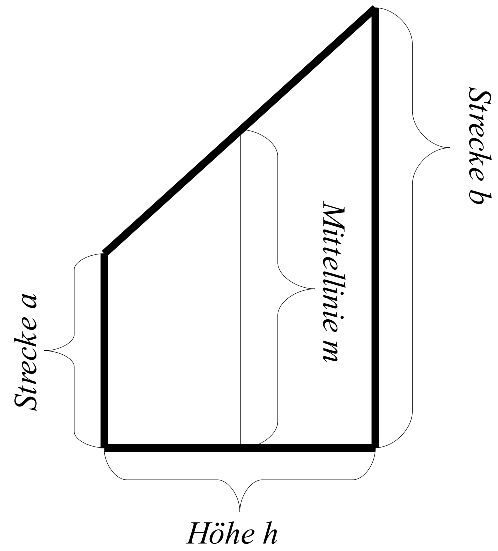
[Anmerkung: „Trapez 1“ ist eigentlich ein Dreieck, seine Fläche lässt sich aber auch durch die Flächenformel eines Trapezes berechnen (mit a=0)]

Die Strecke „m“ ist genau das arithmetische Mittel zwischen Strecke „a“ und Strecke „b“:

$$m = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \quad (3)$$

Wenn man die Formel für „m“ (3) nun in die Formel für die Fläche eines Trapezes (2) einsetzt, ergibt sich allgemein für ein Trapez folgende Fläche „A“:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (a + b)}_{m} \cdot h \quad (4)$$



Nun überlegt man sich, wie man die einzelnen Strecken in derGarfik der Lorenz-Kurve berechnen kann. Die Höhe erhält man hier, indem man das jeweilige u_i von dem vorhergehenden u_{i-1} abzieht. Strecke b entspricht das zugehörige v_i und Strecke a entspricht dann natürlich v_{i-1}.

[Anmerkung: Es handelt sich hier immer um spezielle Trapeze mit zwei rechten Winkeln. Bei solchen speziellen Trapezen ist h leichter zu bestimmen, da man, wie oben zu sehen, einfach die Länge der unteren Seite bestimmen muss. In allgemeinen Trapezen müsste man zunächst eine Senkrechte zur Strecke a zeichnen und die Länge dieser Senkrechten von Seite a bis zu Seite b messen.]

Zusammengefasst:

$$\begin{aligned} h &\mathrel{\hat{=}} u_i - u_{i-1} \\ a &\mathrel{\hat{=}} v_{i-1} \quad (5) \\ b &\mathrel{\hat{=}} v_i \end{aligned}$$

Man erhält also für ein Trapez „i“ durch Einsetzen der konkreten Strecken aus der Grafik (5) in die allgemeine Formel für Trapeze (4) folgende Flächenformel:

$$A_i = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (v_{i-1} + v_i)}_{m} \cdot \underbrace{(u_i - u_{i-1})}_{h} \quad (6)$$

Will man nun die Fläche aller k Trapeze berechnen (Fläche unter der Kurve; s.o. in [(1)]), muss man die Flächen der einzelnen Trapeze addieren:

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2} \cdot (v_{j-1} + v_j) \cdot (u_j - u_{j-1}) \quad (7)$$

Setzt man dieses Ergebnis nun in die Ursprüngliche Formel des Gini-Koeffizienten [(1)] ein ergibt sich:

$$\begin{aligned} G &= 1 - 2 \cdot \underbrace{\mathit{Fläche\ unter\ der\ Kurve}}_{A_k} \\ &= 1 - 2 \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2} \cdot (v_{j-1} + v_j) \cdot (u_j - u_{j-1}) \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{k} (v_{j-1} + v_j) \cdot (u_j - u_{j-1}) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{k} (v_{j-1} + v_j) \cdot (u_j - u_{j-1}) \end{aligned} \quad (8)$$

Es ergibt sich als Formel für den Gini-Koeffizienten:

$$\boxed{G = 1 - \sum_{i=1}^{k} (v_{j-1} + v_j) \cdot (u_j - u_{j-1})}$$