Herleitungen des Verschiebungssatzes und der Formel für die mittlere quadratische Abweichung bei Lineartransformationen

1. Verschiebungssatz:

Man geht von der Definitionsgleichung der mittleren quadratischen Abweichung aus:

$$d_x^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man:

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2 \cdot x_i \cdot \overline{x} + \overline{x}^2)$$

Diese Summe lässt sich in die einzelnen Komponenten aufsplitten:

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (-2 \cdot x_i \cdot \overline{x}) + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \overline{x}^2$$

Durch Anwendung verschiedener Summen-Rechenregeln erhält man:

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot \overline{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}_{\overline{x}} + \frac{1}{n} \cdot n \cdot \overline{x}^2$$ [1]

Man ersetzt noch das arithmetische Mittel:

$$= \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{\overline{x^2}} - 2 \cdot \overline{x}^2 + \overline{x}^2$$

Durch weiteres Ersetzen erhält man:

$$d_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

---

1 *Zu den Herleitungen benötigt man folgende Kenntnisse über Summen:* $\sum_{i=1}^{n} k = n \cdot k$ *;* *und* $\sum_{i=1}^{k} k \cdot x_i = k \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i$ *. (Wobei „k“ eine Konstante darstellt.)*

2. Lineartransformationen und die mittlere quadratische Abweichung:

Es gelte folgender Zusammenhang (Lineartransformation):

$$y_i = a + b \cdot x_i \Leftrightarrow \overline{y} = a + b \cdot \overline{x}$$

Die mittlere quadratische Ableitung von y (d_y^2) berechnet sich wie folgt:

$$d_y^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$$

nach Einsetzen des linearen Zusammenhangs ergibt sich:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} ((a + b \cdot x_i) - (a + b \cdot \overline{x}))^2$$

Löst man die Klammern auf erhält man:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a + b \cdot x_i - a - b \cdot \overline{x})^2 \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (b \cdot x_i - b \cdot \overline{x})^2 \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} b^2 (x_i - \overline{x})^2 \end{aligned}$$

Nach einer Umformungen gelangt man zur Gleichung:

$$b^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}_{d_x^2}$$

Ersetzt man nun noch d_x^2 erhält man:

$$d_y^2 = b^2 \cdot d_x^2$$