Exercicis Mecànica Teòrica *

Josep Dolset Manchó
josep.dolset@campus.uab.es

Curs 2004-2005

Resum

Aquest és un conjunt d'exercicis de Mecànica Teòrica realitzats en el curs 2004-2005 de l'assignatura amb el mateix nom que s'imparteix en el 4t curs de la titulació de física de l'Universitat Autònoma de Bellaterra. La classificació dels exercicis respon al moment en què es van plantejar i al tema que s'estava estudiant.

Índex

*versió: 15 de gener de 2005

1 Formulació d'Alembert

1.1 Trobar $W_{12} = \Delta T$ si $m = m(t)$

Sol:

L'objectiu de l'exercici és trobar la relació entre el treball d'anar d'un punt 1 a un punt 2 i l'energia cinètica, considerant que la massa pot variar en el temps. Partim de la definició de treball i la desenvolupem:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot \vec{v}dt = \int_1^2 d\vec{p}\cdot\vec{v} =$$
$$\int_1^2 \frac{1}{m} d\vec{p}\cdot m\vec{v} = \left(\frac{p^2}{2m}\right|_1^2 = \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} = T_2 - T_1 = \Delta T$$

En aquests càlculs hem utilitzat la segona llei de Newton $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, la definició de velocitat, aïllant $d\vec{r}$: $d\vec{r} = \vec{v}dt$ i la definició de moment lineal $\vec{p} = m\vec{v}$

Podem veure que hem trobat una nova expressió de l'energia cinètica:

$$T = \frac{p^2}{2m}$$

1.2 Perquè en un sistema de partícules es compleix: $\sum_{i=1}^n m_i\vec{r}'_i = 0$ i $\sum_{i=1}^n m_i\vec{v}'_i = 0$

Sol:

En un sistema de partícules podem definir un nou sistema de referència inercial que estigui en el centre de masses del sistema de partícules. Així podem definir la posició del centre de masses com: $\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$, on m_i és la massa de la partícula i, $\vec{r}_i$ és la posició de la partícula des d'un sistema de referència qualsevol. També podem definir la massa total del sistema de partícules com: $M = \sum_{i=1}^N m_i$.

Amb el nou sistema de referència podem donar unes noves coordenades a les partícules, les quals estan relacionades amb les anteriors per: $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}$

Per demostrar la primera igualtat, fem ús de les relacions que hem escrit en els anterior paràgrafs:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}'_i &= \sum_{i=1}^N m_i\left(\vec{r}_i - \vec{R}\right) = \sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i - \vec{R}\sum_{i=1}^N m_i = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i - M\vec{R} = M\vec{R} - M\vec{R} = 0\end{aligned}$$

Abans de demostrar la segona igualtat, hem de definir la veloctat del centre de masses i les velocitats de les partícules en el sistema de referència del

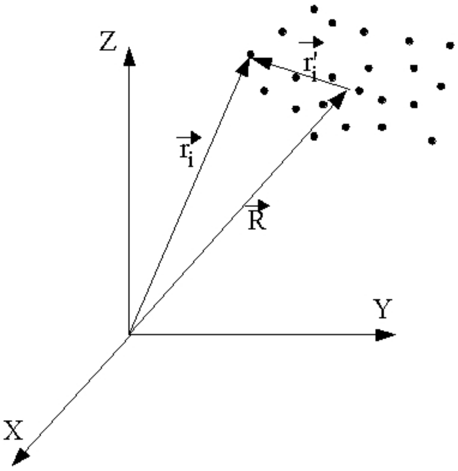

Figura 1: Sistema de partícules

centre de masses. Derivant respecte el temps la relació entre les coordenades dels dos sistemes:

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_i' = \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}}$$

On $\dot{\vec{R}}$ és la velocitat relativa entre els dos sistemes de referència. Ara ja podem fer la demostració:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i' &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}} \right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}} \sum_{i=1}^{N} m_i = \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i - M\dot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i - \vec{P} = \vec{P} - \vec{P} = 0 \end{aligned}$$

En aquesta última demostració hem fet servir la definició de moment lineal total del sistema de partícules: $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ que també es pot definir com: $\vec{P} = M\vec{V} = M\dot{\vec{R}}$

1.3 Resoldre l'integral: $\sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \vec{F}_{ij} d\vec{r}_i$

Sol:

1.4 Demostrar $\frac{\partial s_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{s}_j}{\partial \dot{q}_i}$

Demostrar que:

$$\frac{\partial s_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{s}_j}{\partial \dot{q}_i} \quad \forall j = 1, \dots, n; \ \forall i = 1, \dots, n$$

On $s_j = s_j(q_1, \dots, q_n; t)$
Sol:

Considerem que tenim dos conjunts de coordenades generalitzades amb n elements cadacuna. Abans de començar hem de trobar les relacions entre els dos conjunts de coordenades generalitzades:

$$\begin{array}{ccc}
Si \quad q_i = q_i(s_1, \dots, s_n, t) & \Leftrightarrow & s_j = s_j(q_1, \dots, q_n, t) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial s_j}\dot{s}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} & & \dot{s}_j = \frac{ds_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_j}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial s_j}{\partial t} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\dot{q}_i = \dot{q}_i(s_1, \dots, s_n, \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_n, t) & & \dot{s}_j = \dot{s}_j(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \\
\forall i = 1, \dots, n & & \forall j = 1, \dots, n
\end{array}$$

Per demostar l'igualtat començarem per l'expressió de la dreta, la desenvoluparem i farem servir les relacions anteriors entre els conjunts de coordenades:

$$\frac{\partial \dot{s}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{ds_j}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial s_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial s_j}{\partial t}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial s_j}{\partial q_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial s_j}{\partial q_i}$$

On hem utilitzat $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial s_j}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial s_j}{\partial q_k}$ i $\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i} = 1 \Leftrightarrow k = i$ ja que estem treballant amb coordenades generalitzades que són mutuament independents.

1.5 Demostrar $\frac{\partial \dot{s}_j}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial s_j}{\partial q_i}$

Demostrar que:

$$\frac{\partial \dot{s}_j}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial s_j}{\partial q_i} \quad \forall j = 1, \dots, n; \ \forall i = 1, \dots, n$$

On $s_j = s_j(q_1, \dots, q_n; t)$
Sol:

Considerem les mateixes relacions entre els dos conjunts de coordenades generalitzades s_j i q_i que la demostració anterior.

Per fer la demostració partirem del segon terme i el desenvoluparem:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial s_j}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 s_j}{\partial q_k \partial q_i}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 s_j}{\partial t \partial q_i}\right)$$

On hem utilitzat que si $s_j = s_j(q_1, \ldots, q_n, t) \Rightarrow \frac{\partial s_j}{q_i} = \frac{\partial s_j}{q_i}(q_1, \ldots, q_n, t)$.

Però estem treballant amb coordenades generalitzades que són mutumanent independents, per tant, no importa l'ordre en què realitzem les derivades parcials; matemàticament $\left[\frac{\partial}{\partial q_k}, \frac{\partial}{\partial q_i}\right] = 0$. El mateix podem dir per les derivades parcials amb el temps. Això implica que s_j com a funció de les q_i o t és una diferencial exacta: $\frac{\partial^2 s_j}{\partial q_k \partial q_i} = \frac{\partial^2 s_j}{\partial q_i \partial q_k}$.Per tant podem extreure factor comú $\frac{\partial}{\partial q_i}$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 s_j}{\partial q_i \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 s_j}{\partial q_i \partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial s_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial s_j}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}(\dot{s}_j) = \frac{\partial \dot{s}_j}{\partial q_i}$$

En aquest últim pas hem vist que al extreure factor comú $\frac{\partial}{\partial q_i}$, obteníem l'expressió de $\dot{s}_j$ segons les relacions que hem extret en l'exercici 1.4

1.6 Segona forma de l'equació d'Euler

Demostreu que la *segona forma* de l'equació d'Euler

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - \sum_{i=1}^{n}\dot{y}_i\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

és equivalent a

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Interpreteu el resultat quan s'identifica: $x \to t, y_i \to q_i$i$f \to L$.

Sol:

Per demostrar l'equivalencia, partim de la segona forma i la desenvolupem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - \sum_{i=1}^{n}\dot{y}_i\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{df}{dx} + \frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n}\dot{y}_i\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{df}{dx} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d\dot{y}_i}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} + \dot{y}_i\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right)$$

Ara hem de desenvolupar les derivades totals, sabent que $f = f(y_i, \dot{y}_i, x)$, $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}(y_i, \dot{y}_i, x)$ i $\frac{d\dot{y}_i}{dx} = \ddot{y}_i$. Substituïnt en l'expressió anterior:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\dot{y}_k + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_k}\ddot{y}_k\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\ddot{y}_i\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} + \dot{y}_i\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right) = 0$$

Els dos primers termes de l'expressió s'anul·len mutuament. Si ara expandim els dos sumatoris, veiem que els termes $\ddot{y}_{i,k}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_{i,k}}$ també s'eliminen mutuament perque tots dos son índexs muts que corren des de 1 fins a n. Per tant ens queda:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}-\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)\dot{y}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}-\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) = 0$$

Al treballar amb coordenades generalitzades, que son mutuament independents, les y_i no tenen relació entre elles, per tant, aquest zero prové de que l'expressió és zero per cadascuna de les y_i. Amb aquest argument trobem la primera forma de l'equació d'Euler:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}-\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \qquad \forall i = 1,\ldots,n$$

Si interpretem $x \to t, y_i \to q_i$ i $f \to L$, obtenim varies expressions conegudes. Susbstituïnt en la primera forma de l'equació d'Euler, trobem l'equació d'Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}-\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \quad \to \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Si fem el canvi en la segona forma de l'equació d'Euler, trobem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dx}\left(f-\sum_{i=1}^{n}\dot{y}_i\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right) = 0 \quad \to \quad \frac{\partial L}{\partial t}-\frac{d}{dt}\left(L-\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

On podem identificar la funció energia $h(q_i,\dot{q}_i,t) = \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$ i llavors l'equació ens diu:

$$\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{dh}{dt} = 0 \quad \to \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{dh}{dt}$$

Expressió que ens dóna la condició que ha de complir el Lagrangià en certs casos (lligams esclerònoms i potencials no depenents de les velocitats), per a que es conservi la funció energia.

1.7 Demostrar la relació $\frac{dT}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$ i $\frac{d(mT)}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{p}$ si la massa varia amb el temps

Mostreu que per una partícula amb massa constant l'equació de moviment implica la següent equació diferencial per a l'energia cinètica:

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

mentre que si la massa varia amb el temps l'equació corresponent és

$$\frac{d(mT)}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{p}$$

Sol:

Per trobar la primera igualtat, partim de $\frac{dT}{dt}$ i la desenvolupem:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \right) + \frac{\partial T}{\partial t}$$

Ara utilitzem l'equació d'Euler: $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$, on Q_i és la força generalitzada en la direcció i. Ara hem de veure quan valen els dos termes que hem trobat:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T_2 + T_1 = 2T - T_1 - 2T_0$$

On T_i son els termes de l'energia cinètica que depenen de la potència i de la velocitat i $T = T_2 + T_1 + T_0$

La següent aproximació és suposar que estem treballant amb coordenades cartesianes, en les quals $T_1 = T_0 = 0$ $\left(\Rightarrow \frac{dT_1}{dt} = \frac{dT_0}{dt} = 0 \right)$ i l'energia cinètica no depèn de t $\left(\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \right)$. Si considerem coordenades cartesianes $\Rightarrow$ $\dot{q}_i = v_i$ i $Q_i = F_i$. Substituïnt aquests resultats en el desenvolupament:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \right) + \frac{\partial T}{\partial t} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(-Q_i \cdot \dot{q}_i + \frac{d}{dt} \left(2T - T_1 - 2T_0 \right) \right) + \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot v_i = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Per trobar la segona igualtat $\frac{d(mT)}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{p}$, suposem que estem treballant en coordenades cartesianes i que podem escriure $T = \frac{1}{2} m v^2$, però que també podem escriure com $T = \frac{p^2}{2m}$ on p és el moment lineal. Si substituïm aquesta definició de T en la derivada:

$$\frac{d(mT)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\cancel{m} \frac{p^2}{2 \cancel{m}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{p^2}{2} \right) = \cancel{2} \dot{\vec{p}} \cdot \vec{p} \frac{1}{\cancel{2}} = \dot{\vec{p}} \cdot \vec{p} = \vec{F} \cdot \vec{p}$$

1.8 Vector posició del centre de masses

Demostreu que la magnitud R del vector de posició per al centre de masses des d'un origen arbitrari ve donat per l'equació

$$M^2R^2 = M\sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2$$

Sol:

2 Formulació de Lagrange

2.1 Equacions de Nielsen

Mostreu que les equacions de Lagrange en la forma:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Poden ser escrites també en la forma coneguda com de *Nielsen*:

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} - 2\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Sol:

Per demostrar l'equivalència comencem pel primer terme de la forma de Nielsen i el desenvolupem:

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t}\right) =$$
$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\frac{\ddot{q}_j}{\dot{q}_i} + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t}\right)$$

Primer, podem veure que el terme $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\frac{\ddot{q}_j}{\dot{q}_i}$ és exactament 0 perque l'acceleració $\ddot{q}_j$ només depen del temps i per tant la derivada $\frac{\ddot{q}_j}{\dot{q}_i}$ és 0. Ens podem fixar també en el terme $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i}$, el qual té per valor una delta de Kronecker,és a dir, val 1 si $i = j$ i 0 si $i \neq j$.

Per altra banda, podem desenvolupar el terme $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ per trobar:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_k \partial \dot{q}_i}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i}\ddot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{q}_i}\right)$$

Comparant l'expressió anterior amb el desenvolupament de $\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i}$, podem veure que estan relacionats per:

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

Sustituïnt aquesta relació en la forma de Nielsen, trobem directament l'equació d'Euler

2.2 Moment canònic per potencials generalitzats

Mostreu que si el potencial d'un Lagrangià conté termes dependents de la velocitat, el moment canònic corresponent a una coordenada de rotació θ del sistema no és només el moment angular mecànic sinó que ve donat per

$$p_\theta = L_\theta - \sum_i n \cdot r_i \times \nabla_{v_i} U$$

on ∇_{v_i} és l'operador gradent amb les derivades respecte de les components de la velocitat i n és el vector unitari en la direcció de rotació. Si les forces són de caràcter electromagnètic, el moment canònic és doncs

$$p_\theta = L_\theta - \sum_i n \cdot r_i \times q_i A_i$$

Sol:

2.3 Equacions de Lagrange separables

A vegades passa que les coordenades generalitzades apareixen separadament en l'energia cinètica i l'energia potencial de tal manera que T i V es poden escriure de la forma

$$T = \sum_i f_i(q_i)\dot{q}_i^2 \quad \text{i} \quad V = \sum_i V_i(q_i)$$

Mostreu que les equacions de Lagrange són aleshores separables i que el problema pot ser sempre reduït a quadratures

Sol:

2.4 Problema de la geodèsica

Demostrar que la distància més curta sobre una superfície esfèrica és una geodèsica

Sol:

Volem saber la distància més curta entre dos punts sobre una esfera, per fer-ho fàcil utilitzarem coordenades esfèriques:

$$\begin{aligned} x &= rsin(\theta)cos(\phi) \\ y &= rsin(\theta)sin(\phi) \\ z &= rcos(\theta) \end{aligned}$$

Sabem que en coordenades cartesianes $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, escrit en coordenades esfèriques i suposant que només ens podem moure per la superfície de l'esfera de radi 1 (escollim aquest valor per simplificar) i per tant $dr = 0$

$$dl = \left(d\theta^2 + d\phi^2 sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

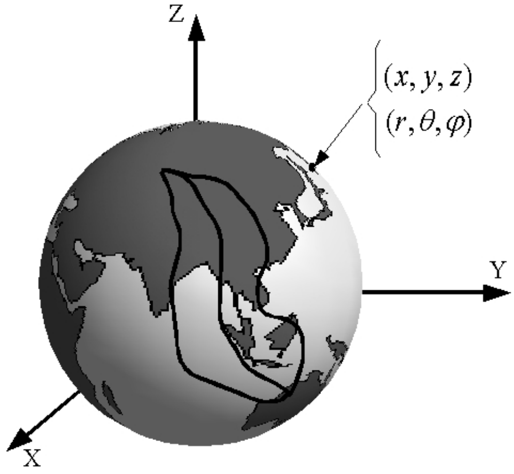

Figura 2: Geodèsica sobre una esfera

Ara podem trobar la longitud que busquem:

$$L = \int dl = \int \left(d\theta^2 + d\phi^2 sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\int d\phi \left(\frac{d\theta^2}{d\phi^2} + sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \int d\phi \left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

On hem definit $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\phi}$. Ara podem identificar $f = \left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$ i aplicar l' equació d'Euler a la funció f. Però en aquest cas és més senzill aplicar la 2a forma de l'equació d'Euler:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

En el nostre cas podem identificar $y' \equiv \dot{\theta}$, $x \equiv \phi$ i podem simplificar l'equació d'Euler (la nostra f no depen de ϕ):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = ct$$

Substituïnt la nostra f, fent les derivades i operant una miqueta:

$$\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} - \dot{\theta}\frac{\partial\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial\dot{\theta}} = a$$

$$\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\dot{\theta}^2}{\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}} = a$$

$$\dot{\theta}^2 + sin^2\theta - \dot{\theta}^2 = a\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad sin^2\theta = a\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

2.5 Problema de les antenes parabòliques

Demostrar perquè les antenes i les cuines solars tenen la forma d'una paràbola

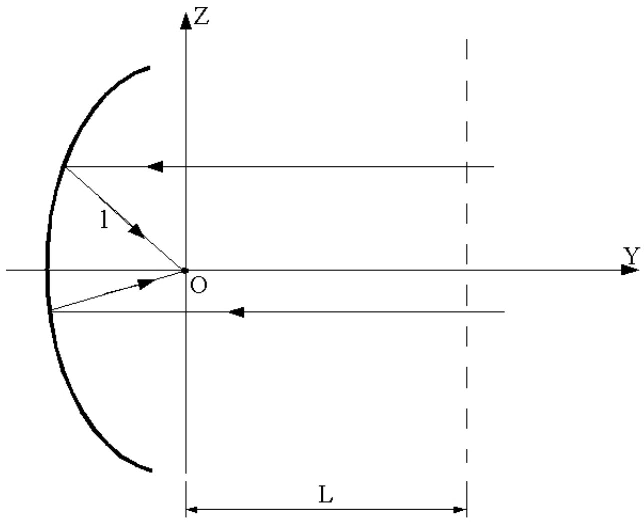

Figura 3: Superfície estigmàtica

Sol:

Per demostrar que antenes i les cuines solars tenen la forma d'una paràbola hem d'utilitzar la versió de principi de Hamilton aplicada en l'òptica: el Principi de Fermat. El principi de Fermat ens diu que un raig de llum anirà pel camí més ràpid entre un punt O i un punt O', si per fer-ho, ha de descriure una paràbola, doncs aquest és el camí que seguirà el raig de llum. El camí òptic es defineix com: $\tau = \int ndl$

Per al nostre problema imposem que n és constant, per tant els raigs viatgen en línea recta si no troben cap obstacle. Partirem el problema en dos parts, des de l'infinit fins a la superfície i de la superfície al punt O, on focalitza. Si utilitzem la definició de camí òptic i els sumem, obtenim:

$$\begin{aligned} nl + nl' &= k \\ l + l' &= k' \\ \sqrt{z^2+y^2} + (L+y) &= k' \end{aligned}$$

Si manipulem l'expressió, podem arribar a l'equació:

$$y = az^2 + b$$

Podem veure que obtenim una equació d'una paràbola, que és just la forma que és capaç de concentrar els raigs que arriben paral·lels des de l' infinit a un punt. Els factors a i b son constants que depenen de L,n i k i tenen per valor:

$$a = \frac{1}{2(L-k)} \qquad b = -\frac{(L-k)^2}{2(L-k)}$$

2.6 Deducció equacions Euler-Lagrange

Deduïr les equacions d'Euler-Lagrange a partir del principi de Hamilton

Sol:

Definim l'acció $S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt$ on L és el nostre Lagrangià que depen de les n coordenades generalitzades q_i, de les n velocitats generalitzades $\dot{q}_i$ i del temps.

El principi de Hamilton ens diu que el moviment real és aquell compleix $\delta S = 0$, per tant anem a variar l' acció S:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \right] dt$$

No podem deformar el temps (estem a mecànica clàssica $\Rightarrow$ $\delta t = 0$). El terme amb $\delta \dot{q}_i$ ens molesta i l'hem de reescriure:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i$$

Substituïnt en l'integral anterior i reordenant els termes en dos integrals:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i \right] dt =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \right] \delta q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) dt$$

Podem veure que la segona integral és exactament zero, perque $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$, llavors al avaluar-la, obtenim:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) dt = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Ara apliquem el principi de Hamilton, que matemàticament ens diu $\delta S = 0$ i obtenim:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \delta q_i dt = 0$$

Sabem que estem treballant amb coordenades generalitzades, les quals son independents, per tant el zero de l'integral només pot aparèixer si l'integral és zero per cada una de les coordenades, i ens queda l'integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \delta q_i dt = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

Ara apliquem el lema fonamental del càlcul de variacions. Aquest ens diu que si una integral definida $\int_1^2 M(x)\eta(x)dx = 0$ on la funció $\eta(x)$ pot prendre qualsevol valor, llavors l'única possibilitat és que $M(x)$ sigui zero. Podem identificar δq_i com $\eta(x)$ i obtenim les equacions d'Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad \forall i = 1, \ldots, n \qquad \text{Eq.s d'Euler-Lagrange}}$$

2.7 Indeterminació del Lagrangià

Si L és un lagrangià per a un sistema de n graus de llibertat que satisfà les equacions de Lagrange, demostreu per substitució directa que

$$L' = L + \tfrac{dF(q_1,\ldots,q_n,t)}{dt},$$

on F és una funció arbitrària que val zero en els extrems ($F(q_1, t_1) = F(q_2, t_2) = 0$), però diferenciable, també satisfà les equacions de Lagrange.

Sol:

Definim l'acció $S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt$ i la variem:

$$\delta S' = \delta \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L' dt$$

Sabem que $L' = L + \frac{dF}{dt}$ i que ,pel principi de Hamilton, la variació de l'acció S, també és zero

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L' dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta\left(L + \frac{dF}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \frac{dF}{dt} dt = 0 + \int_{t_1}^{t_2} \delta \frac{dF}{dt} dt$$

Podem veure que els dos Lagrangians donaran les mateixes equacions de moviment si $\int_{t_1}^{t_2} \delta \frac{dF}{dt} dt = 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \frac{dF}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\delta F)\, dt = (\delta F|_{t_1}^{t_2} = \delta F(q_2, t_2) - \delta F(q_1, t_1) = 0$$

Amb aquest resulat hem demostrat que si L' i L estan relacionats per aquesta expressió, porten a les mateixes equacions de moviment

2.8 Invariància del Lagrangià

Demostrar per susbstitució directa que les equacions de moviment són invariants respecte del sistema de coordenades generalitzades utilitzat:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0$$
$$si \quad q_i = q_i(s_1, \ldots, s_n, t) \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Sol:

Tenim dos conjunts de coordenades generalitzades q_i i s_j amb n components cadascuna. Abans de començar a operar amb l'equació d'Euler-Lagrange, anem a calcular les dependències de les velocitats generalitzades d' una de les bases amb les coordenades i les velocitats generalitzades de l'altra base:

$$\begin{array}{ccc}
Si \quad q_i = q_i(s_1, \ldots, s_n, t) & \Leftrightarrow & s_j = s_j(q_1, \ldots, q_n, t) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial s_j}\dot{s}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} & & \dot{s}_j = \dfrac{ds_j}{dt} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s_j}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial s_j}{\partial t} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\dot{q}_i = \dot{q}_i(s_1, \ldots, s_n, \dot{s}_1, \ldots, \dot{s}_n, t) & & \dot{s}_j = \dot{s}_j(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) \\
\forall i = 1, \ldots, n & & \forall j = 1, \ldots, n
\end{array}$$

Hem de demostrar que si es compleix $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ per $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ també s'ha de complir $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0$ per $L = L(s_j, \dot{s}_j, t)$. Per demostrar-ho susbtituïm el Lagrangià $L = L(s_j, \dot{s}_j, t)$ a l'equació $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ i desenvolupem les derivades parcials:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial s_j}\frac{\partial s_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\frac{\partial \dot{s}_j}{\partial q_i}\right] + \frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial q_i}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial s_j}\frac{\partial s_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\frac{\partial \dot{s}_j}{\partial \dot{q}_i}\right] + \frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \dot{q}_i}$$

Observant les relacions que hem extret al principi, podem veure $\dfrac{\partial s_j}{\partial \dot{q}_i} = 0$ i si el temps no és una coordenada més $\Rightarrow \dfrac{\partial t}{\partial q_i} = \dfrac{\partial t}{\partial \dot{q}_i} = 0$. Substituïnt aquests resultats en l'equació de Lagrange, obtenim:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\frac{\partial \dot{s}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_j}\frac{\partial s_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\frac{\partial \dot{s}_j}{\partial q_i} = 0$$

Ara utilitzem les demostracions 1.4 i 1.5 per reescriure les derivades parcials i l'equació:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\frac{\partial s_j}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_j}\frac{\partial s_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\frac{d}{dt}\frac{\partial s_j}{\partial q_i} = 0$$

Podem veure que $\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\frac{\partial s_j}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\frac{d}{dt}\frac{\partial s_j}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\frac{\partial s_j}{\partial q_i}$. Substituïnt en l'equació trobem l'equació d'Euler-Lagrange per les coordenades s_j:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\frac{\partial s_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial s_j}\frac{\partial s_j}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0$$

Sabent que estem treballant amb coordenades generalitzades, les quals són mutuament independents, per tant podem eliminar el sumatori amb j:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad \forall i = 1,\dots,n \qquad \text{Eq.s d'Euler-Lagrange}}$$

2.9 Exemple de lligam no integrable

Sol:

2.10 Equacions d'Euler-Poisson

a) Aplicant el principi de Hamilton, demostreu que per un Lagrangià de la forma $L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$ podem trobar les equacions d'Euler-Poisson:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad\qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Nota: Per a resoldre aquest apartat cal imposar: $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = \delta \dot{q}_i(t_1) = \delta \dot{q}_i(t_2) = 0$.

Sol:

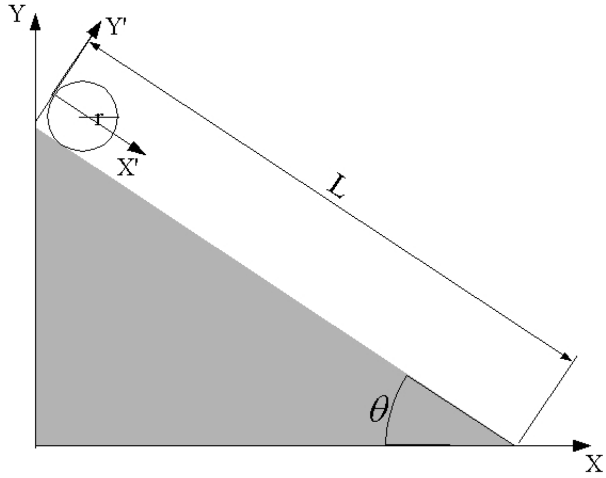

Figura 4: Roda que baixa sense lliscar per un pla inclinat

Definim l'acció: $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)dt$, la variem i en desenvolupem l' integrand:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta \ddot{q}_i \right] dt$$

Ara necessitem desenvolupar $\delta \dot{q}_i$ i $\delta \ddot{q}_i$ en funció de δq_i :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i$$

Analogament per l'altre terme:

$$\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta \ddot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta \frac{d\dot{q}_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta \dot{q}_i) =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\delta\left(\frac{dq_i}{dt}\right) =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\delta q_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\delta q_i\right)$$

Substituïm aquests dos resultats en la nostra integral i obtenim:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i +$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\delta q_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\delta q_i\right) dt$$

Agrupant els termes amb δq_i i amb $\frac{d}{dt}$ i partint l'integral en dues:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) \right] \delta q_i dt +$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\delta q_i \right) dt$$

Primer ens fixem en la segona equació, que veurem que ha d'esser estrictament 0, perqué al realitzar l'integral trobem:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\delta q_i \right|_{t_1}^{t_2}$$

Però al avaluar l'expressió entre t_1 i t_2 ens dóna 0 a causa de la nota de l'enunciat que deïa: $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = \delta \dot{q}_i(t_1) = \delta \dot{q}_i(t_2) = 0$.

Per tant només ens queda la primera integral:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) \right] \delta q_i dt$$

Ara podem aplicar el principi de Hamilton, que ens diu que el moviment real és aquell que minimitza l'acció, és a dir, aquell que fa que $\delta S = 0$. Per tant la primera integral val 0. Però sabem que estem treballant amb coordenades generalitzades, les quals son mutuament independents entre elles, i podem afirmar que aquest zero prové d'una suma de zeros, un per cada coordenada generalitzada, per tant podem eliminar el sumatori en i, traient-lo de l'integral i aplicant que les coordenades són generalitzades i trobem:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) \right] \delta q_i dt = 0$$

Ara podem aplicar el lema fonamental del càlcul de variacions. Aquest lema ens diu que si una integral definida $\int_1^2 M(x)\eta(x)dx = 0$ on la funció $\eta(x)$ pot prendre qualsevol valor, llavors l'única possibilitat és que $M(x)$ sigui zero. Aplicant-ho al nostre cas, podem identificar $\eta(x)$ amb δq_i i obtenim les equacions d'Euler-Poisson:

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad \forall i = 1, \ldots, n \qquad \text{Eq.s d'Euler-Poisson}}$$

b) Apliqueu el resultat anterior al Lagrangià:

$$L = -\tfrac{m}{2}q\ddot{q} - \tfrac{k}{2}q^2$$

Reconeixeu les equacions de moviment?

Sol:

Substituïm el Lagrangià de l'enunciat en les equacions d'Euler-Poisson i trobem:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial - \tfrac{m}{2}q\ddot{q} - \tfrac{k}{2}q^2}{\partial \ddot{q}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial - \tfrac{m}{2}q\ddot{q} - \tfrac{k}{2}q^2}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial - \tfrac{m}{2}q\ddot{q} - \tfrac{k}{2}q^2}{\partial q}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(-\frac{mq}{2}\right) - \frac{d0}{dt} - \frac{m\ddot{q}}{2} - kq = -\frac{m\ddot{q}}{2} - \frac{m\ddot{q}}{2} - kq$$

$$-m\ddot{q} - kq = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Podem veure que obtenim l'equació de moviment d'un oscil·lador harmònic de freqüència $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

2.11 Transformació boost

1. Demostrar que la transformació boost és el límit no-relativista de la transformació de Lorentz
2. Introduïr la tranformació boost en el test de simetria i en el teorema de Noether i veure que es conserva i sota quines condicions.

Sol:

1. La transformació boost que relaciona els dos sistemes de referència inercials S i S' (considerem que estan en configuració estàndard[1], és a dir, els seus orígens de temps s'han fer coincidir, els eixos dels SR coinciden per t=0 i es mou S' respecte S a una velocitat constant i de vector $\vec{v} = (v, 0, 0)$)vé descrita per:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x - v \cdot t \\ y &\rightarrow y' = y \\ z &\rightarrow z' = z \\ t &\rightarrow t' = t \end{aligned}$$

De la relativitat espacial, sabem que la transformació de Lorentz (en configuració estàndard un altre cop) vé descrita per:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = \gamma(v)(x - v \cdot t) \\ y &\rightarrow y' = y \\ z &\rightarrow z' = z \\ t &\rightarrow t' = \gamma(v)(t - \frac{v}{c^2}x) \end{aligned}$$

[1]Curs de relativitat espacial - Eduard Massó (Manuals de la UAB)

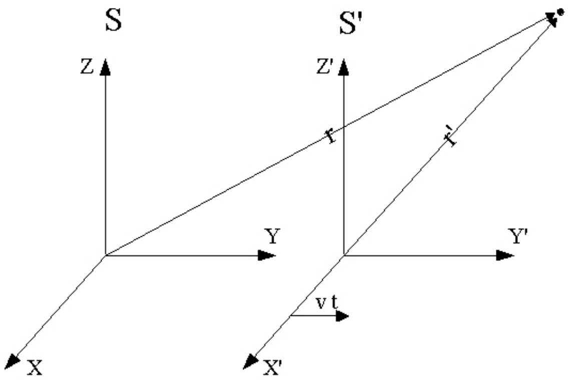

Figura 5: Dos sistemes de referència en CE (Configuració estandard)

On hem utilitzat el factor $\gamma(v)$ que es defineix com: $\gamma(v) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ i c és la velocitat de la llum en el buit.

El límit no-relativista implica que $v << c$, per tant podem aproximar els factors $\frac{v}{c} = \frac{v}{c^2} = 0$ i el factor γ: $\gamma = (1-0)^{-\frac{1}{2}} = 1$. Substituïnt aquestes aproximacions en la transformació de Lorentz, obtenim:

$$\begin{aligned} x \to x' = \gamma(v)(x - v \cdot t) \quad &\to \qquad x' = x - v \cdot t \\ t \to t' = \gamma(v)(t - \frac{v}{c^2}x) \quad &\to \qquad t' = t \end{aligned}$$

Per tant, la transformació boost és el límit no-relativista de la transformació de Lorentz

2. El test de simetria, per un sistema amb N partícules que es mouen en l'espai tridimensional, pren la forma:

$$\sum_{a=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\left(\delta x_a^i \frac{\partial L}{\partial x_a^i} + \delta \dot{x}_a^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^i} + \right) + \delta t \frac{\partial L}{\partial t} + L\frac{d(\delta t)}{dt} = -\frac{d(\delta G)}{dt}$$

Ens interessa que el Lagrangià també sigui invariant, per tant, hem d'imposar que $\delta G = 0$. Mirant la transformació boost, podem identificar $\delta x = vt$, $\delta t = 0$ i ,per tant , $\delta \dot{x} = v$. Si substituïm aquests valors en el test de simetria trobem:

$$vt\frac{\partial L}{\partial x} + v\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

Ara suposem que estem describint el nostre lagrangià en coordenades cartesianes i que el potencial només depen de les posicions, en aquest cas: $L(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - V(x)$ i podem simplificar l'expressió anterior:

$$-vt\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 0$$

Però si el potencial només depèn de les posicions, en podrem deduïr una força ($F = -\nabla V$) i utilitzant la segona equació de Newton ($F = \dot{p}$), per tant $-\frac{\partial V}{\partial x} = \dot{p}$. Per altra banda, el moment generalitzat es defineix com: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Substituïnt en l'equació:

$$vt\dot{p} + vp = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(vtp) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{vtp = cte}|$$

Si ara utilitzem el teorema de Noether, que es defineix com:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x - h(x, \dot{x}, t)\delta t + \delta G = cte$$

Novament imposem l' invariància del Lagrangià ($\Rightarrow \delta G = 0$) i si substituïm els valors de δx i δt que hem trobat al principi, trobem:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}vt = cte$$

Amb la suposició que hem fet pel lagrangià, $(L(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - V(x))$ i la definició de moment generalitzat, trobem el mateix resultat que amb el test de simetria:

$$\underline{pvt = cte}|$$

2.12 Argumentar perquè l' energia cinètica pren la forma: $T = \frac{1}{2}mv^2$

3 Formulació de Hamilton

3.1 Hamiltonià per $L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$

Si tenim un Lagrangià del tipus $L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$, quina forma té el Hamiltonià? i les equacions canòniques?

Aplicar al Lagrangià: $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 - \frac{1}{2}c\ddot{q}^2$

Sol:

3.2 Transformació de Legendre inversa

1. Invertiu l'ordre de la transformació de Legendre per a derivar les propietats de $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ a partir de $H(q_i, p_i, t)$, tractant les $\dot{q}_i$ com quantitats independents, i mostreu que duu a les equacions del moviment de Lagrange.

2. Pel mateix procediment trobeu les equacions de moviment en termes de la funció

$$L'(p_i, \dot{p}_i, t) = -\sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i q_i - H(q_i, p_i, t)$$

Sol:

1.

2.

3.3 Hamiltonià $G(\dot{q}_i, \dot{p}_i, t)$

Es pot establir una formulació tipus Hamiltoniana en la qual $\dot{q}_i$ i $\dot{p}_i$ són les variables independents amb un "hamiltonià"$G(\dot{q}_i, \dot{p}_i, t)$. Partint de la formulació Lagrangiana, mostreu en detall com construir $G(\dot{q}_i, \dot{p}_i, t)$, i deriveu les corresponents "equacions canòniques de Hamilton". *Nota*: Aquí p_i es defineix en termes de q_i, $\dot{q}_i$ de la manera habitual

Sol:

Per construir "l'hamiltonià"$G(\dot{q}_i, \dot{p}_i, t)$ a partir del formalisme lagrangià, hem de realitzar una transformació de Legendre, intercanviant q_i per $\dot{p}_i$, per tant hem d'extreure la relació entre $\dot{p}_i$ i el lagrangià.

Sabem que $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, si derivem respecte el temps: $\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Ara utilitzem l'equació d'Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$. Per tant, la relació entre $\dot{p}_i$ i el lagrangià és: $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

Per construir "l'hamiltonià"$G(\dot{q}_i, \dot{p}_i, t)$, comencem per la transformació de Legendre:

$$G(\dot{q}_i, \dot{p}_i, t) = \sum_{j=1}^{n} \dot{p}_j q_j - L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Ara, necessitem invertir l'equació $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ i obtenir q_i en funció de $\dot{q}_i$, $\dot{p}_i$ i t. La condició necesària i suficient per a què es pogui invertir, és que l'Hessià ha d'ésser diferent de zero, on l'hessià es defineix com: $det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_i} \right| \neq 0$

Un cop hem invertir l'equació, podem susbstituïr-la en la transformació de Legendre i ja obtindrem el nostre hamiltonià $G(\dot{q}_i, \dot{p}_i, t)$

Per a derivar les corresponents equacions canòniques per aquest hamiltonià, calcularem dG per a les dues definicions de G que tenim, una com a funció que depèn de $\dot{q}_i$ i $\dot{p}_i$ i l'altra a través de la transformada de Legendre, després les igualarem i n' extraurem les equacions canòniques.

$$dG = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial G}{\partial \dot{p}_i} d\dot{p}_i \right) + \frac{\partial G}{\partial t} dt$$

Per altra banda, amb la transformada de Legendre:

$$\begin{aligned} dG &= \sum_{j=1}^{n} \left(d\dot{p}_j q_j + \dot{p}_j dq_j - \overbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}^{\dot{p}_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(d\dot{p}_j q_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Si ara comparem les dues expressions de dG i substituïm la definició de $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, obtenim les equacions canòniques per aquest hamiltonià:

$$\boxed{q_i = \frac{\partial G}{\partial \dot{p}_i} \qquad p_i = -\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i} \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}}$$

3.4 Principi de Hamilton modificat

Mostreu que el principi de Hamilton modificat

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right) dt = 0$$

duu a les equacions canòniques de Hamilton

Sol:

Partim de l'equació de l'enunciat e introduïm la variació (la delta) dintre de l'integral, ja que el temps és absolut en mecànica clàssica i commuta amb l'operació de variar.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) - \frac{\partial H}{\partial t} \right] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) - \frac{\partial H}{\partial t} \right] dt = 0$$

Ens molesta el terme $\delta \dot{q}_i$, i l'hem de reescriure: $p_i \delta \dot{q}_i = p_i \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i$. El susbstituïm en l'integral i agrupem els termes per δq_i i δp_i.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\delta p_i \dot{q}_i + \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) - \frac{\partial H}{\partial t} \right] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\underbrace{\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i}_{1} + \underbrace{\frac{d}{dt} (p_i \delta q_i)}_{2} + \underbrace{\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i}_{3} - \underbrace{\frac{\partial H}{\partial t}}_{4} \right] dt = 0$$

Veiem que tenim quatre integrals que podem calcular per separat. Primer, podem veure que l' integral 2 és idènticament 0, ja que les condicions $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ del formalisme de Lagrange del qual partim, aquí també són vàlides. La segona condició $\delta \dot{q}_i(t_1) = \delta \dot{q}_i(t_2) = 0$, aquí es converteix en $\delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0$

Les integrals 1 i 3 es poden solucionar simultaniament. Primer cal donar-se compte que les q_i i les p_i son mutuament independents, per tant el zero prové d'una suma de zeros, un per cada i, i podem eliminar el sumatori en i de les dues integrals. Després cal aplicar el lema fonamental del càlcul de variacions, sabent que les quantitats δq_i i δp_i poden prendre qualsevol valor (veure exercici 2.6 en la pàgina 12, per veure l'ús del lema fonamental del càlcul de variacions)

Amb aquests dos passos, arribem al resultat que els dos parentèsis de les integrals 1 i 3 han d'ésser zero i trobem les equacions canòniques de Hamilton:

$$-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \qquad \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

3.5 Equacions de Hamilton per variables no independents

Si les variables canòniques no són totes independents, però estan conectades per condicions auxiliars de la forma

$$\psi(q_i, p_i, t) = 0$$

mostreu que les equacions canòniques de moviment poden escriure's com

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

on les λ_k són multiplicadors de Lagrange indeterminats

4 Formulació canònica

4.1 Demostrar les propietats dels claudàtors de Poisson

Demostrar les següents propietats del claudàtors de Poisson a travès de la seva definició:

$$[u,v] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right)$$

a) $[u,u] = 0$

b) $[u,v] = -[v,u]$

c) $[au+bv,w] = a[u,w] + b[v,w]$

d) $[uv,w] = u[v,w] + [u,w]v$

e) $[u,vw] = [u,v]w + v[u,w]v$

f) $[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$ (Identitat de Jacobi)

Sol:

a)

$$[u,u] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial u}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial u}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial u}{\partial p_i} \right) = 0$$

On hem utilitzat que el producte de derivades parcials és commutatiu: $\frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial u}{\partial p_i}$

b)

$$[u,v] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) = -\sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} + \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) = -[v,u]$$

c)

$$[au+bv,w] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial au+bv}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial au+bv}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} + b\frac{\partial v}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - a\frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} - b\frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a\left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) + b\left(\frac{\partial v}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) \right) =$$

$$a[u,w] + b[v,w]$$

En aquest apartat hem utilitzat la propietat de linealitat de la derivada, és a dir, si a és una constant llavors $\frac{\partial(au)}{\partial s} = a\frac{\partial u}{\partial s}$. Després hem agrupat els termes amb a i b per trobar el resultat final.

d)

$$[uv, w] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial uv}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial uv}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} v + u \frac{\partial v}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} v - u \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) v + u \left(\frac{\partial v}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) \right) =$$

$$[u, w]\, v + u\, [v, w]$$

Aquí hem fet servir la derivada del producte, siguin u i v dues funcions que depenen de q_i: $\frac{\partial uv}{\partial q_i} = \frac{\partial u}{\partial q_i} v + u \frac{\partial v}{\partial q_i}$.

El segon pas ha estat redistribuïr els termes en funció de u i de v. Finalment, tornant a aplicar la definició de claudàtor de Poisson, trobem el resultat final.

e)

$$[u, vw] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial vw}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial vw}{\partial q_i} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} w + v \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} w - v \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) w + v \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) \right) =$$

$$[u, v]\, w + w\, [u, w]$$

Aquesta demostració és anàloga a l'anterior i s'han d' utilitzar les mateixes propietats.

f) $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ (Identitat de Jacobi)

Per demostrat explícitament l' identitat de Jacobi, desenvoluparem un dels tres parèntesis i després farem permutacions $u \to v \to w \to u$ per trobar el valor dels altres parèntesis.

$$[u,[v,w]] = \left[u, \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial q_i}\frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial p_i}\frac{\partial w}{\partial q_i}\right)\right] =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial q_i}\frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial p_i}\frac{\partial w}{\partial q_i}\right)\right) - \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial q_i}\frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial p_i}\frac{\partial w}{\partial q_i}\right)\right)\right\}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial^2 v}{\partial q_i \partial p_j}\frac{\partial w}{\partial p_i} + \frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial q_i}\frac{\partial^2 w}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial^2 v}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial w}{\partial q_i} - \frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_i}\frac{\partial^2 w}{\partial q_i \partial p_j}\right\} -$$

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial^2 v}{\partial q_i \partial q_j}\frac{\partial w}{\partial p_i} + \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q_i}\frac{\partial^2 w}{\partial p_i \partial q_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial^2 v}{\partial p_i \partial q_j}\frac{\partial w}{\partial q_i} - \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial p_i}\frac{\partial^2 w}{\partial q_i \partial q_j}\right\}$$

4.2 Propietat de la identitat de Jacobi

Demostrar que la identitat de Jacobi es satisfà si el claudàtor de Poisson representa el commutador de dues matrius quadrades: $[A, B] = AB - BA$

Sol:

Igual que en l'exercici anterior, desenvoluparem un dels tres parèntesis de Poisson de la identitat de Jacobi i després farem permutacions per trobar els altres termes.

$$[A,[B,C]] = [A, BC - CB] =$$
$$ABC - ACB - (BCA - CBA) =$$
$$ABC + CBA - ACB - BCA$$

Fent permutacions: $A \to B \to C \to A$, podem trobar els altres parèntesis i demostrar l' identitat:

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] =$$
$$\underline{ABC}_1 + \underline{CBA}_2 - \underline{ACB}_3 - \underline{BCA}_4 + \underline{BCA}_4 + \underline{ACB}_3 -$$
$$\underline{BAC}_5 - \underline{CAB}_6 + \underline{CAB}_6 + \underline{BAC}_5 - \underline{ABC}_1 - \underline{CBA}_2 = \underline{0}|$$