Problemes de Mecànica Teòrica: Full Extra

Mateo Celma (mateo.celma@campus.uab.es)
Sarah-Charlotta Heidorn (s.c.h.ninive@gmx.de)
Josep Dolset (josep.dolset@campus.uab.es)

Curs 2004-2005

1. Trobeu les equacions d'un pèndol elàstic de longitud en repòs l, constant recuperadora k i massa m

   <u>Solució:</u>

   Hem de descriure un pèndol elàstic, el qual es mou en dues dimensions, per tant elegim coordenades polars:

$$x = rsin\theta$$
$$y = rcos\theta$$

   On hem definit θ com l'angle que forma el pèndol amb l'eix y. I ja podem escriure la Lagrangiana del pèndol:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) - mgy - \frac{1}{2}k(x^2+y^2) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgrcos\theta - \frac{1}{2}kr^2 \end{aligned}$$

   Per trobar les equacions de moviment, utilitzem l'equació d'Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ per les dues coordenades generalitzades r i θ. On hem definit: $\omega^2 = \frac{k}{m}$

   Per r:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(m\dot{r}) &= mr\dot{\theta}^2 - mgcos\theta - kr \\ \ddot{r} + \omega^2 r &= r\dot{\theta}^2 - gcos\theta \\ \ddot{r} + (\omega^2 - \dot{\theta}^2)r &= -gcos\theta \end{aligned}$$

Per θ:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) &= mgrsin\theta \\
2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} &= grsin\theta \\
2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= gsin\theta
\end{aligned}
$$

2. Una partícula de massa m es mou lliurement al llarg del filferro que gira en un pla horitzontal amb una velocitat angular ω constant al voltant d'un eix vertical

   (a) Trobeu les equacions de moviment
   Solució:
   Podem veure primerament que dels 3 graus de llibertat només en queda 1, perque el moviment es produeix en un pla x-y i la partícula es troba lligada al filferro que gira amb velocitat angular constant ω, per tant, $\dot{\theta} = \omega$. Si escollim coordenades polars, podem escriure el Lagrangià com:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right)$$

   Per tant, introduïnt el Lagrangià en l'equació d'Euler-Lagrange, obtenim l'equació de moviment per r:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\left(m\dot{r}\right) &= mr\omega^2 \\
\ddot{r} &= r\omega^2
\end{aligned}
$$

   Solucionant l'equació diferencial, veiem que és l'equació de moviment d'un oscil·lador harmónic simple i trobem la solució següent on A, B, ϕ, ϕ' són constants que depenen de les condicions inicials

$$r(t) = Acos(\omega t + \phi) = Bsin(\omega t + \phi')$$

   (b) Si ara el filferro gira en un pla vertical, trobeu les noves equacions del moviment de la partícula
   Solució:
   En aquest apartat, tornem a utilitzar coordenades polars, però ara hem d'afegir un nou terme al Lagrangià, el corresponent al

potencial, que prendrà la forma: $V = mgy$. Escrivint-lo en coordenades polars: $V = mgrsin\theta$. Per tant el nostre Lagrangià serà:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right) - mgrsin\theta$$

El nostre espai de configuració té dues dimensions: r i θ. Substituïnt el Lagrangià en l'equació d'Euler-Lagrange, trobem:
Per r

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\omega^2 + mgsin\theta$$

$$\boxed{\ddot{r} = r\omega^2 - gsen(\omega t)}$$

Per θ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\omega\right) - mgrcos\theta$$

$$\boxed{\dot{r} = \frac{g}{2\omega}cos(\omega t)}$$

3. Dos cossos d'igual massa m estan units per una corda sense massa. Un d'ells, P, es troba damunt la taula on pot girar lliurement mentre que l'altre, Q, penja per sota de la taula a través d'un forat O. Si hom dóna a P una velocitat inicial de valor v_0, perpendicular a la direcció OP quan la longitud té el valor a, determineu:

   (a) El Lagrangià del sistema
   Solució:
   Podem veure que la partícula P només es pot moure en el pla de la taula, per tant, només té dos graus de llibertat ($\dot{z}_P = 0$), mentre que la partícula Q només té un grau de llibertat ($\dot{x}_Q = 0$ $\dot{y}_Q = 0$). Si ens fixem que la corda no té massa i la considerem inextensible, podem obtenir una altra relació que ens redueix un grau de llibertat. Si denotem per l la llargada de la corda i r com la distancia del punt P al forat: $\Rightarrow$ $r + z = l \rightarrow \dot{r} = -\dot{z}$.
   Podem veure que les millors coordenades per afrontar el problema són les coordenades cilíndriques, i el nostre Lagrangià serà:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$$

Introduïnt els lligams $\Downarrow$

$$\boxed{L = m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mg\,(l - r)}$$

(b) Les equacions de moviment de P

Solució:

Introduïnt el Lagrangià en l'equació d'Euler-Lagrange, obtenim les equacions de moviment

Per r:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(2m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 - mg = 0$$

$$\boxed{\ddot{r} = \frac{g}{2} + \frac{r\dot{\theta}^2}{2}}$$

Per θ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) - 0 = 0$$

$$\boxed{mr^2\dot{\theta} = cte}$$

(c) La velocitat de P

Solució:

Aquest problema és anàleg al del moviment planetari. Tenim dues constants del moviment $L = mr^2\dot{\theta}$ (moment angular) i $E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr$ (energia mecànica total).

Podem extreure $\dot{r}$ de l'energia mecànica total i substituïr $\dot{\theta}$ en funció del moment angular, per trobar una expressió de $\dot{r}(E, L, r)$. Manipulant les expressions obtenim:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - mgr - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}$$

Per altra banda podem expressar $d\theta = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dr}dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}}dr$. Substituïnt l'expressió que hem trobat de $\dot{r}$ i la definició de moment angular, podem trobar una expressió de $\theta(r)$:

$$\theta(r) = \int \frac{\frac{L}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left(E - mgr - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}$$

4. Trobeu l'equació del moviment d'una esfera de radi R i densitat ρ_1 que cau verticalment en un medi de densitat ρ_0 ($\rho_0 < \rho_1$) i amb un

fregament de la forma $F_f = \frac{1}{2}kv^2$. Quina és la velocitat máxima de caiguda?

Solució:

L'esfera de radi R té per Lagrangià:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$$

Però tenim dues forces que no són derivables d'un potencial. La primera és la força de fricció que es deriva de la funció dissipativa de Rayleigh amb l'expressió: $F_f = \frac{\partial F}{\partial v}$ on $F = \frac{1}{2}kv^2$, l'altra és la força d'Arquímedes que ens diu que un cos submergit en un medi líquid o gasòs amb una densistat donada, experimenta una força contraria al moviment igual al volum de gas o líquid que ocupa. En el nostre cas la força d'Arquímedes serà una constant que valdrà: $F_{Arq} = m_0 g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 g$

Aquestes dues forces no es poden derivar d'un potencial, per tant hem d'utilitzar l'equació de Lagrange per trobar l'equació de moviment de l'esfera

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= Q_y \\
\frac{d}{dt}(m\dot{y}) + mg &= \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} + F_{Arq} \\
m\ddot{y} + mg &= k\dot{y} + m_0 g \\
\underline{m\ddot{y} - k\dot{y}} &\underline{= (m_0 - m)\, g}|
\end{aligned}$$

On hem escrit $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1$ i $m_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$. Ja tenim l'equació de moviment de l'esfera.

Per trobar la velocitat màxima, hem d'analitzar el problema, si un cos cau en un potencial i hi actua una força de fricció que depen de la velocitat, aquest cos s'accelerarà fins arribar a una velocitat límit, que es mantindrà constant. Agafant l'equació de moviment i assumint que per la velocitat límit, l'acceleració és 0, trobem:

$$\begin{gathered}
m\ddot{y} - k\dot{y} = (m_0 - m)\, g \\
\ddot{y} = 0 \Downarrow \\
\underline{\dot{y}_{max}} = \frac{m_0 - m}{-k} g = \underline{\frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho_1 - \rho_0}{k} g}|
\end{gathered}$$

5. Un punt material de massa m pot moure's al llarg d'un filferro rectilini que dista h de l'origen O. La recta OC (veure la figura) gira al voltant d'aquest origen amb una velocitat angular constat ω. La posició del

punt material pot especificar-se en funció de l'angle ς i la distancia q al punt C. Si el punt material està sotmès a la gravetat, determineu com evoluciona q com a funció del temps amb les condicions inicials: $\varsigma(0) = 0, q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0$

Solució:

Per trobar l'evolució temporal del cos, ens inventem un nou sistema de referència (u, v) que estarà centrat en el punt C de la figura de l'enunciat i que girarà amb velocitat angular constant ω, per tant la partícula només es mourà per l'eix v. Per fer-ho hem de realitzar una translació de l' origen al punt C i una rotació dels eixos. Comencem per la translació, definint dos eixos (x', y'):

$$x' = x + hcos\omega t$$
$$y' = y + hsin\omega t$$

Ara hem de realitzar una rotació que dependrà de t dels eixos (x', y'). Rotació que estarà especificada per la següent transformació:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\omega t & sin\omega t \\ -sin\omega t & cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + hcos\omega t \\ y + hsin\omega t \end{pmatrix}$$

Sabem que el nostre Lagrangià escrit en les coordenades (x, y) té la forma:

$$L(x, y) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

I ara tenim la relació entre les coordenades (x, y) i les coordenades (u, v). Però en el nou sistema de referència, el cos només es mou en la coordenada v, per tant $u = 0$ i $\dot{u} = 0$ i podem identificar $v = q$ i escriure el lagrangià només en funció de q. Manipulant la transformació podem obtenir:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{q}^2 + 2\dot{q}h\omega + v^2\omega^2$$

I per fi tenim el Lagrangià en funció de q i $\dot{q}$:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 + 2\dot{q}h\omega + q^2\omega^2) - mg(qcos\omega t + hsin\omega t)$$

Ja podem extreure l'equació de moviment per q amb l'equació d'Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$
$$\frac{d}{dt}(m\dot{q} + mh\omega) - \left(m\omega^2 q - mgcos\omega t\right) = 0$$
$$\ddot{q} - \omega^2 q = gcos\omega t$$

Aquesta equació és un oscil·lador harmònic forçat, la solució és la suma de la solució exacta per l'oscilador harmònic sense força exterior i una solució particular quan hi introduïm la força, mirant que l'oscil·lador harmònic i la força tenen la mateixa freqüència (estem en ressonància) - utilitzant les condicions inicials de q i $\dot{q}$, obtenim l'evolució temporal del cos:

$$q(t) = \frac{g}{2\omega} tcos\omega t$$

6. Un cos de massa m rellisca sense fregament per un pla inclinat un angle α. A la seva vegada, el pla, de massa M, descansa sobre el terra i pot lliscar sobre aquest, també sense fregament. Trobeu el Lagrangià del sistema i les equacions de moviment.

   Solució:

   El Lagrangià del sistema és:

$$L = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) - m_1 g y_1$$

   Analitzant el problema, el podem dividir en 2 moments, abans i després de que la massa m_1 estigui en contacte amb la massa m_2. Mentre la massa m_1 està sobre la massa m_2 es compleix el lligam:

$$y_1 - (x_2 - x_1)tan\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{y}_1 = (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\, tan\alpha$$

   Introduïnt el lligam en el Lagrangià, obtenim:

$$L = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2 + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2\, tan^2\alpha\right) + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - m_1 g(x_2 - x_1)tan\alpha$$

   Ara podem extreure les equacions de moviment amb l'equació d'Euler-Lagrange:

   Per x_1:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(m_1\left(1 + tan^2\alpha\right)\dot{x}_1 - m_1\dot{x}_2 tan^2\alpha\right) - m_1 g tan\alpha &= 0 \\ \left(1 + tan^2\alpha\right)\ddot{x}_1 - tan^2\alpha\ddot{x}_2 - g tan\alpha &= 0 \\ \ddot{x}_1 &= \frac{g tan\alpha + \ddot{x}_2 tan^2\alpha}{1 + tan^2\alpha} \end{aligned}$$

Per x_2:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left(m_2 + m_1 tan\alpha\right)\dot{x}_2 - m_1\dot{x}_1 tan\alpha\right) - \left(-m_1 g tan\alpha\right) = 0$$

$$\left(m_2 + m_1 tan\alpha\right)\ddot{x}_2 = m_1 tan\alpha\left(\ddot{x}_1 - g\right)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_1 tan\alpha\left(\ddot{x}_1 - g\right)}{m_2 + m_1 tan\alpha}$$