

Problemas de Procesado Óptico y Holografía

Josep Dolset Manchó
josep.dolset@campus.uab.es

Curso 2004-2005

1. a) Demostrar que $TF\{TF\{f(x,y)\}\} = f(-x,-y)$
- b) Si se aplica un montaje de procesado de imágenes como el descrito en la figura, en el que las lentes delgadas L1 y L2 tienen focales f'_1 y f'_2 , y se ilumina con una onda plana monocromática, obtener los aumentos.
- c) Comparar el resultado con el que se obtiene mediante la óptica geométrica

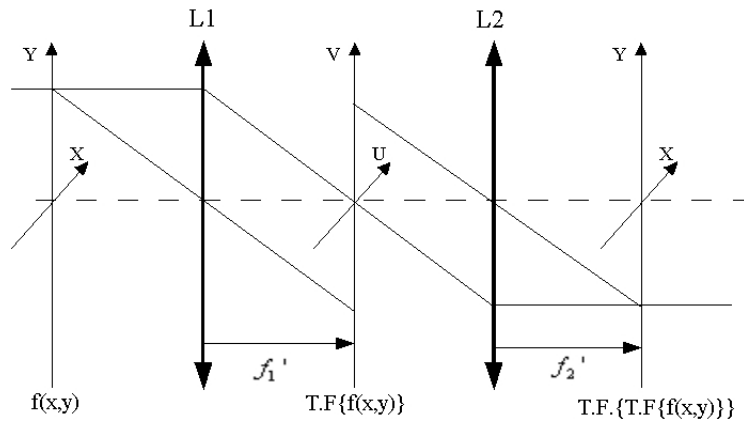


Figura 1: Muntatge del problema 1

Solució:

- a) Per demostrar la primera igualtat, fem ús de les definicions de la

transformada de Fourier i de la transformada inversa:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\rightarrow T.F\{f(x, y)\} = \\ &\int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(f_x x + f_y y)} dx dy = G(f_x, f_y) \\ G(f_x, f_y) &\rightarrow T.F^{-1}\{G(f_x, f_y)\} = \\ &\int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{2\pi i(f_x x + f_y y)} df_x df_y = f(x, y) \end{aligned}$$

Si apliquem la transformada de Fourier a $T.F\{f(x, y)\}$, obtenim:

$$\begin{aligned} T.F\{T.F\{f(x, y)\}\} &= T.F\{G(f_x, f_y)\} = \\ &\int \int_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) e^{-2\pi i(f_x x + f_y y)} dx dy = \\ &\int \int_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) e^{2\pi i(f_x(-x) + f_y(-y))} dx dy = \\ &f(-x, -y) \end{aligned}$$

On hem introduït el signe $-$ dins del producte $f_x x + f_y y$ i hem utilitzat la definició de transformada inversa de Fourier que hem descrit abans.

b)

c) Segons la òptica geomètrica, aquest sistema és el mateix que un telescopi astronòmic (ullera astronòmica¹), i els seus augments venen donats per l'expressió:

$$Augments = -\frac{f'_2}{f'_1} = \frac{|f'_2|}{|f'_1|}$$

On el signe $-$ apareix per causa del criteri de signes de les focals.

2. Demostrar el principi de Babinet: “*Las figuras de difracción que producen una abertura y una obstrucción complementarias entre sí, son idénticas en todos los puntos excepto en el centro*”’.

Solució:

Per demostrar el principi de Babinet hem de calcular la figura de difracció per als dos casos i comparar els resultats. Sigui $f(x, y)$ la funció que implementa la transmitància de l'obertura per la longitud d'ona que utilitzem. La figura de difracció produïda per aquesta obertura serà el mòdul quadrat de la seva transformada de Fourier, és a dir,

¹Artur Carnicer i Ignasi Juvells, “Apunts d'Òptica física”; Departament de física aplicada i òptica, Universitat de Barcelona

hem de calcular la transformada de Fourier de $f(x, y)$ i calcular-ne el mòdul quadrat:

$$f(x, y) \rightarrow T.F.\{f(x, y)\} = F(u, v) \rightarrow I_{obertura} = |F(u, v)|^2$$

Podem escriure matemàticament l'obstrucció com el complementari de l'obertura, és a dir, l'obstrucció vindrà descrita per $f_2(x, y) = 1 - f(x, y)$. Novament hem de realitzar la seva transformada de Fourier i el seu mòdul quadrat per trobar la seva figura de difracció:

$$\begin{aligned} f_2(x, y) \rightarrow T.F.\{f_2(x, y)\} &= T.F.\{1 - f(x, y)\} = \\ &= T.F.\{1\} - T.F.\{f(x, y)\} = \\ &= 2\pi\delta(u, v) - F(u, v) \end{aligned}$$

On hem utilitzat la propietat de linealitat de la transformada de Fourier i el valor de $T.F.\{1\} = 2\pi\delta(u, v)$ ². Per tant la figura de difracció serà:

$$I_{obertura} = \begin{cases} |F(u, v)|^2 = I_{obertura}, & \text{si } u \neq 0 \text{ ó } v \neq 0; \\ |2\pi\delta(u, v) - F(u, v)|^2 \neq I_{obertura}, & \text{si } u = v = 0; \end{cases}$$

Amb aquest resultat hem demostrat el principi de Babinet, on hem utilitzat la definició de la delta de Dirac:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{si } u \neq 0 \text{ ó } v \neq 0; \\ 1, & \text{si } u = v = 0; \end{cases}$$

3. Una abertura rectangular de dimensiones a y b se ilumina con una onda plan de longitud de onda λ . Inmediatamente detrás de la abertura se sitúa una lente de focal f' y se obtiene la figura de difracción en el plano focal de la lente.
 - a) Hallar en coordenadas espaciales del plano focal de la lente la distribución del campo eléctrico
 - b) Hallar la distribución de intensidad
 - c) Explica como es la figura de difracción que se observa y la relación entre las dimensiones del máximo central de difracción (distancia del origen al primer mínimo) y las dimensiones de la abertura.

Solución:

²Spiegel, Liu i Murray, "Fórmulas y tablas de matemática aplicada"

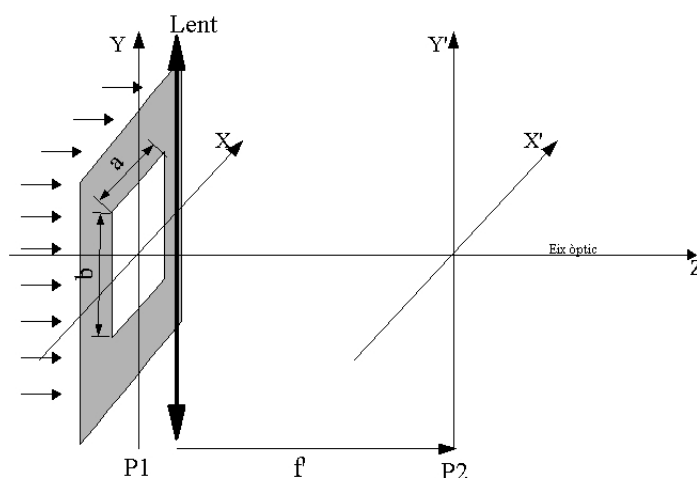


Figura 2: Muntatge del problema 3

- a) Per trobar el camp elèctric en el pla P2, ens fixem en la figura que hem dibuixat. Estem il·luminant l'escletxa rectangular amb ones planes, és a dir, podem considerar que la font emissora es troba en l'infinit. Podem implementar l'obertura rectangular amb la funció:

$$f(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y}{b}\right)$$

On hem utilitzat la definició de $\text{rect}(x)$ que tenim dels apunts:

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

De resultats anteriors trobats en el primer tema de l'assignatura i de les pràctiques del laboratori sabem que el camp elèctric en el pla P2 serà la transformada de Fourier de l'escletxa rectangular. Però realitzarem el càlcul complet a partir de l'aproximació de Fresnel de la propagació lliure i del pas de l'ona a través de la lent.

Mirant la figura del problema, estem il·luminant l'escletxa amb ones planes que podem escriure com e^{ikz} , la seva amplitud serà 1 si les normalitzem. Per tant el camp elèctric que arriba a la lent serà justament $f(x, y)$.

El pas per la lent es pot implementar com la multiplicació pel factor $t_l(x, y) = e^{ikn\Delta_0} e^{\left[-ik\frac{x^2+y^2}{2f'}\right]}$. Per tant el camp elèctric després de la lent és $f(x, y) \cdot t_l(x, y)$.

Per passar de la lent al pla P2, hem d'utilitzar l'aproximació de Fresnel per la propagació lliure, l'aproximació ens diu que coneguda la distribució del camp elèctric en un pla, $f(x, y) \cdot t_l(x, y)$ en el nostre cas, podem conèixer la distribució del camp elèctric en un altre pla, $U(u, v)$, utilitzant l'expressió:

$$U(u, v) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} e^{ik\frac{u^2+v^2}{2z}} \iint_{-\infty}^{\infty} U_1(x, y) e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z}} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(xu+yv)} dx dy$$

Substituint $U_1(x, y) = f(x, y) \cdot t_l(x, y)$ en l'expressió anterior i avaluant-la per $z = f'$, obtenim

$$\begin{aligned} U(u, v) &= \frac{1}{i\lambda f'} e^{ikf'} e^{ik\frac{u^2+v^2}{2f'}} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot t_l(x, y) e^{ik\frac{x^2+y^2}{2f'}} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f'}(xu+yv)} dx dy \\ &= \frac{1}{i\lambda f'} e^{ikf'} e^{ik\frac{u^2+v^2}{2f'}} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{ikn\Delta_0} e^{\left[-ik\frac{x^2+y^2}{2f'}\right]} e^{ik\frac{x^2+y^2}{2f'}} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f'}(xu+yv)} dx dy \\ &= C e^{ik\frac{u^2+v^2}{2f'}} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f'}(xu+yv)} dx dy \end{aligned}$$

Podem definir unes noves coordenades $x_u = \frac{u}{\lambda f'}$ i $y_v = \frac{v}{\lambda f'}$

$$U(x_u, y_v) = C e^{i\pi f' \lambda (x_u^2 + y_v^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (x x_u + y y_v)} dx dy$$

Ara podem veure que l'integral és justament la transformada de Fourier de la funció $f(x, y)$ en les noves coordenades x_u i y_v i el valor de C és: $C = \frac{1}{i\lambda f'} e^{ikf'} e^{ikn\Delta_0}$. Per tant aquest és el valor del camp elèctric és:

$$\underline{U(x_u, y_v) = C e^{i\pi f' \lambda (x_u^2 + y_v^2)} T.F. \{f(x, y)\}}$$

- b) Per trobar la distribució d'intensitats que tenim en el pla P2 hem de calcular el mòdul quadrat del camp elèctric que hem trobat en l'apartat a), vigilat que el camp elèctric té valors complexos i per tant hem de multiplicar el camp elèctric per el seu complex conjugat.

$$\begin{aligned} I(x_u, y_v) &= |U(x_u, y_v)|^2 = U(x_u, y_v) \cdot U^*(x_u, y_v) = \\ &= C e^{i\pi f' \lambda (x_u^2 + y_v^2)} T.F. \{f(x, y)\} \cdot C^* e^{-i\pi f' \lambda (x_u^2 + y_v^2)} T.F. \{f(x, y)\} = \\ &= C C^* T.F. \{f(x, y)\}^2 = \\ &= \frac{1}{\lambda^2 f'^2} T.F. \{f(x, y)\}^2 \end{aligned}$$

Per calcular el valor de $T.F. \{f(x, y)\}$, anem a buscar a les taules de les transformades de Fourier dels apunts i trobem que

val $\text{absinc}(ax_u)\text{sinc}(by_v)$ on la funció $\text{sinc}(x)$ es defineix com $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. Per tant la distribució d'intensitats en el pla P2 val:

$$I(x_u, y_v) = \left(\frac{ab}{\lambda f'} \right)^2 \text{sinc}^2(ax_u) \text{sinc}^2(by_v)$$

- c) Si representem la distribució d'intensitat que hem trobat en l'apartat anterior, obtindrem la següent imatge (aquesta imatge va ser obtinguda en la pràctica 1 (Difracció de Fraunhofer) de l'assignatura):

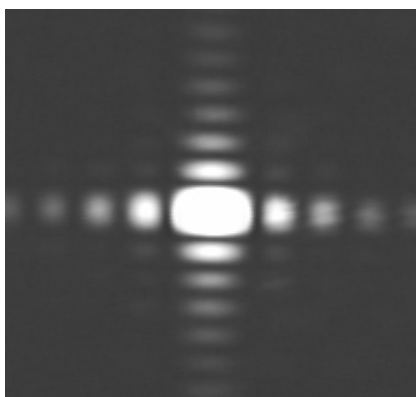


Figura 3: Difracció de Fraunhofer d'un rectangle

Per relacionar les dimensions de l'obertura i de la seva figura de difracció hem de trobar els mínims d'intensitat, és a dir, els valors de x_u i y_v que fan que l'intensitat sigui 0. Igualant a 0 l'expressió de l'intensitat que hem trobat abans, obtenim:

$$\begin{aligned}
 I(x_u, y_v) &= 0 \\
 \left(\frac{ab}{\lambda f'} \right)^2 \text{sinc}^2(ax_u) \text{sinc}^2(by_v) &= 0 \\
 \text{sinc}(ax_u) \text{sinc}(by_v) &= 0 \\
 \Downarrow \quad (\text{Per la definició de sinc}(x)) \quad \Downarrow \\
 \frac{\sin(\pi ax_u)}{\pi ax_u} = 0 \quad \text{o bé} \quad \frac{\sin(\pi by_v)}{\pi by_v} = 0 \\
 \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\
 x_u = \frac{n}{a} \qquad \qquad \qquad y_v = \frac{m}{b} \\
 \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\
 \underline{u = n \frac{\lambda f'}{a}} \qquad \qquad \qquad \underline{v = m \frac{\lambda f'}{b}}
 \end{aligned}$$

Podem veure que la distància als primers mínims ($n=1$ i $m=1$), ens dóna una relació entre el màxim central de la figura de difracció i la mida del rectangle. Són inversament proporcionals, és a dir, si l'amplada del rectangle a es fa més gran, l'amplada del màxim central de la figura de difracció és farà més petit, i si l'amplada de l'esclatxa es fa més petita, l'amplada de la figura de difracció es farà més gran. Analogament per b .

També podem veure que la mida de la figura de difracció ve determinada per la focal de la lent que utilitzem i per la longitud de la font que utilitzem, quant més grans siguin, més gran serà la figura de difracció i podem fer mesures més acurades.

4. Sea una red de difracción de fase, en la que la transmisión en amplitud es uniforme e igual a la unidad. La diferencia de fase entre unos escalones y otros es ϕ_0 , tal y como se muestra en la figura, y se ilumina con una onda plana de longitud de onda λ .
 - a) Hallar la posición de los máximos principales
 - b) Hallar el valor de intensidad de éstos
 - c) Si $\phi_0 = \pi$, calcular el valor de intensidad del máximo central, es decir el de orden 0, y el valor de intensidad en los máximos de orden 1

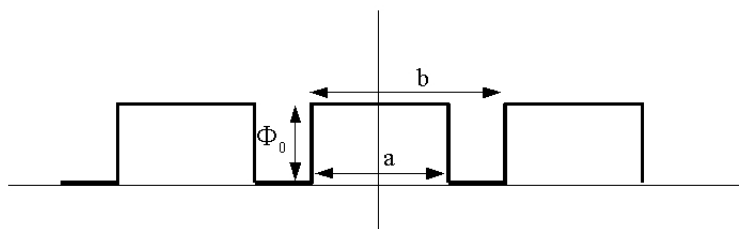


Figura 4: Filtre del problema 4

Solució: Per tal de realitzar els càlculs, hem de trobar la distribució d'intensitats que crea aquesta xarxa, i per tant hem de poder escriure la xarxa matemàticament amb alguna $f(x)$. Utilitzant les manipulacions que vam aprendre en la pràctica 1 sobre convolució, podem escriure la xarxa de difracció com:

$$f(x) = \exp \left[i\phi_0 \text{rect} \left(\frac{x}{a} \right) \right] \otimes \text{comb}(bx)$$

Analitzant $f(x, y)$ podem veure que introdueix un desfassament de ϕ_0 entre $|x| \geq \frac{a}{2}$ i que al convolucionar amb el "peine" $\text{comb}(bx)$ es

repeteix cada nb , on n pertany als enters. Ara ja podem realitzar la transformada de Fourier d'aquest filtre, recordant que una convolució es converteix en producte en l'espai de Fourier:

$$\begin{aligned} & T.F. \{f(x, y)\} \\ & T.F. \left\{ e^{i\phi_0 \text{rect}(\frac{x}{a})} \otimes \text{comb}(bx) \right\} \\ & T.F. \left\{ e^{i\phi_0 \text{rect}(\frac{x}{a})} \right\} \cdot T.F. \{ \text{comb}(bx) \} \\ & \left(\frac{\cos\phi_0}{a} \text{sinc}(\pi a \omega) \right) \cdot \frac{1}{b} \text{comb} \left(\frac{\omega}{b} \right) \end{aligned}$$

On hem realitzat el següent càlcul:

$$\begin{aligned} T.F. \left\{ e^{i\phi_0 \text{rect}(\frac{x}{a})} \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi_0 \text{rect}(\frac{x}{a})} e^{-2\pi\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi_0 \text{rect}(\frac{x}{a})} \cos(-2\pi\omega x) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi_0 \text{rect}(\frac{x}{a})} \sin(-2\pi\omega x) dx \end{aligned}$$

La segona integral és zero perquè l'integrand és antisimètric i estem integrant en un interval simètric. Si desenvolupem la primera integral, obtenim:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi_0 \text{rect}(\frac{x}{a})} \cos(-2\pi\omega x) dx = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\phi_0 \text{rect}(\frac{x}{a})) \cos(-2\pi\omega x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\phi_0 \text{rect}(\frac{x}{a})) \cos(-2\pi\omega x) dx = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\phi_0 \text{rect}(\frac{x}{a})) \cos(2\pi\omega x) dx = \\ & \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos(\phi_0) \cos(2\pi\omega x) dx = \left(\frac{\cos\phi_0}{a} \text{sinc}(\pi a \omega) \right) \end{aligned}$$

Novament, la segona integral és zero, perquè l'integrand és antrsimètric i estem integrant-lo en un interval simètric. L'última integral l'hem trobat a les taules d'integrals: $\int_1^2 \cos(2\pi\omega x) dx = \frac{\sin(2\pi\omega x)}{2\pi\omega} \Big|_1^2$

Ara podem trobar la distribució d'intensitats, sabent que és el mòdul quadrat de la transformada de Fourier:

$$I(\omega) = \left(\frac{\cos\phi_0}{ab} \right)^2 \left(\text{comb} \frac{\omega}{b} \right)^2 \cdot \text{sinc}^2(\pi a \omega)$$

Si ara observem l'expressió, veurem que val 0 excepte quan $\omega = \frac{n}{b}$ on n pertany als enters. I ja podem trobar la posició i el valor de tots els màxims

- a) Segons l'expressió que hem trobat per $I(\omega)$, trobem un màxim principal a $w = 0$ i els altres es troben per $\omega = \frac{n}{b}$ on n pertany als enters $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$
- b) Per trobar el valor d'intensitat de cada màxim, substituïm el valor que hem trobat per ω a la intensitat:

$$\begin{aligned}
 I(\omega = 0) &= \left(\frac{\cos\phi_0}{ab}\right)^2 (\text{sinc}(0))^2 = \left(\frac{\cos\phi_0}{ab}\right)^2 \\
 I(\omega = \frac{1}{b}) &= \left(\frac{\cos\phi_0}{ab}\right)^2 \left(\text{sinc}\left(\frac{\pi a}{b}\right)\right)^2 \\
 I(\omega = \frac{-1}{b}) &= \left(\frac{\cos\phi_0}{ab}\right)^2 \left(\text{sinc}\left(\frac{-\pi a}{b}\right)\right)^2 = \left(\frac{\cos\phi_0}{ab}\right)^2 \left(\text{sinc}\left(\frac{\pi a}{b}\right)\right)^2 \\
 I(\omega = \frac{2}{b}) &= \left(\frac{\cos\phi_0}{ab}\right)^2 \left(\text{sinc}\left(\frac{2\pi a}{b}\right)\right)^2
 \end{aligned}$$

Podem veure que els màxims apareixen simètrics respecte a zero i amb la mateixa intensitat, a més podem extreure una expressió per trobar el màxim d'ordre n (o $-n$):

$$I(\omega = \pm \frac{n}{b}) = \left(\frac{\cos\phi_0}{ab}\right)^2 \left(\text{sinc}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\right)^2$$

- c) Si $\phi_0 = \pi \Rightarrow \cos(\phi_0) = -1$. Si substituïm en les intensitats que hem trobat abans, arribem al resultat:

$$\begin{aligned}
 I(\omega = 0) &= \left(\frac{1}{ab}\right)^2 \\
 I(\omega = \frac{1}{b}) &= \left(\frac{1}{ab}\right)^2 \left(\text{sinc}\left(\frac{\pi a}{b}\right)\right)^2 \\
 I(\omega = \frac{-1}{b}) &= \left(\frac{1}{ab}\right)^2 \left(\text{sinc}\left(\frac{\pi a}{b}\right)\right)^2
 \end{aligned}$$

5. Se registra un holograma de transmisión con luz de un láser de argón cuya longitud de onda es 488 nm. Las imágenes se forman con láser de helio-neón de 633 nm.

- a) Considerando que las distancias de las fuentes de referencia y de reconstrucción son infinitas y que la distancia al objeto es 10 cm. ¿a qué distancia se forma la imagen virtual del objeto?
- b) Considerando que la distancia de la fuente de reconstrucción es infinita, que la distancia de la fuente de referencia es el doble que la distancia del objeto, y que ésta última es 10 cm, ¿a qué distancia se forma la imagen virtual? ¿Cuál es el aumento?

Solució:

- a) Utilitzant l'aproximació quadràtica i el registre de l'holograma d'un punt, podem aconseguir l'expressió $\frac{1}{z_i} = \left(\frac{1}{z_p} \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_0} \right)$, on z_i és la distància entre l'emulsió i l'imatge, z_p és la distància entre l'emulsió i la font de reconstrucció, z_r és la distància entre l'emulsió i la font de referència i z_0 és la distància entre l'objecte i l'emulsió. λ_1 i λ_2 són les longituds d'ona de les fonts de referència i de reconstrucció respectivament.

En el nostre cas, tenim les següents dades:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 488nm & \lambda_2 &= 633nm \\ z_0 &= -10cm & z_p &= z_r = \infty \end{aligned}$$

El signe - de z_0 és a causa del criteri de signes. Per tant, podem calcular el valor de z_i per aquesta configuració:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_i} &= \left(\frac{1}{z_p} \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_0} \right) = \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_0} \\ z_i &= \mp z_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \pm 10cm \frac{488nm}{633nm} = \pm 7.7cm \end{aligned}$$

El valor - correspon a l'imatge virtual i el valor de + correspon a l'imatge real

- b) Ara tenim les dades:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 488nm & \lambda_2 &= 633nm \\ z_0 &= -10cm & z_r &= -20cm & z_p &= \infty \end{aligned}$$

Els signes - de z_0 i z_r son causats pel criteri de signes. Utilitzant la mateixa expressió que en l'apartat anterior, trobem que l'imatge es formarà a una distància:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_i} &= \left(\frac{1}{z_p} \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_0} \right) = \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_0} \\ \frac{1}{z_i} &= \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{1}{z_r} - \frac{1}{z_0} \right) = \pm \frac{633nm}{488nm} \left(-\frac{1}{20cm} + \frac{1}{10cm} \right) \\ z_i &= \pm 7.7cm \end{aligned}$$

Per trobar l'augment, utilitzem l'expressió $M^{-1} = \left| \frac{\lambda_1 z_0}{\lambda_2 z_i} \right|$ i substituint l'expressió anterior de z_i , obtenim:

$$M^{-1} = \left| \frac{\lambda_1 z_0}{\lambda_2 z_p} \pm \frac{z_0}{z_r} \mp 1 \right|$$

Susstituint els valors, trobem el valor de:

$$M^{-1} = \left| \pm \frac{10cm}{20cm} \mp 1 \right| = \left| \pm \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right| = \left| \mp \frac{1}{2} \right|$$

$$\underline{M = 2}$$

6. Se registra un holograma según la figura. La película fotográfica se amplía en un factor m .

- a) Demuestra que las imágenes que forma el holograma ampliado, se forman a una distancia z_i
- b) y con aumento M dado por las siguientes expresiones, en función de las longitudes de onda, de las distancia de las fuentes de referencia z_r , y de reconstrucción z_p y de la distancia del objeto z_0

$$z_i = \left[\frac{1}{z_p} \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1 a_r m^2} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1 a_0 m^2} \right]^{-1} \quad y \quad M = \left| \frac{\lambda_2 z_i}{m \lambda_1 z_0} \right|$$

Solución: