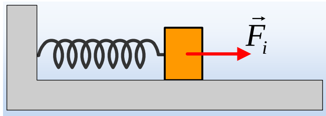
Μια σύνθεση ταλαντώσεων και οι φάσεις.



Ένα σώμα ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου. Το σώμα μπορεί να εκτελέσει εξαναγκασμένη ταλάντωση με την επίδραση αρμονικής δύναμης F_1, όπως στο σχήμα. Μετά την λήξη των μεταβατικών φαινομένων και τη σταθεροποίηση του πλάτους, παίρνοντας κάποια στιγμή $t_0=0$, η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι $x_1 = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(8\pi t + \pi/2\right)$ (S.I.). Αν αντικαταστήσουμε τη δύναμη F_1 με άλλη F_2, η αντίστοιχη εξίσωση είναι $x_2 = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(10\pi t + \pi/2\right)$ (S.I.). Αν στο σώμα ασκηθούν ταυτόχρονα και οι δύο παραπάνω δυνάμεις, η αντίστοιχη εξίσωση της κίνησης είναι:

$$x = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(8\pi t + \pi/2\right) + 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(10\pi t + \pi/2\right) \quad \text{(S.I.)}$$

i) Να αποδείξτε ότι η κίνηση του σώματος ΔΕΝ είναι αρμονική, αλλά παρουσιάζει διακροτήματα.

ii) Να βρεθεί η περίοδος του διακροτήματος.

iii) Να βρεθεί το πλάτος και η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές:

α) $t_0=0s$, β) $t_1=0{,}5s$, γ) $t_2=1s$.

iv) Τις παραπάνω χρονικές στιγμές να υπολογιστούν οι φάσεις των δύο παραπάνω ταλαντώσεων και η διαφορά φάσης μεταξύ τους. Να σχολιάστε το αποτέλεσμα.

v) Να υπολογιστεί η απομάκρυνση και η ταχύτητα του σώματος, τη χρονική στιγμή $t_3=0{,}25s$.

vi) Να βρεθεί το πλάτος και η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές t_0, t_1, t_2 αν η εξίσωση κίνησης του σώματος ήταν:

$$x=0{,}1\cdot\eta\mu(8\pi t) + 0{,}1\cdot\eta\mu(10\pi t) \quad \text{(S.I.)}$$

Απάντηση:

i) Βλέποντας την εξίσωση της κίνησης, που μας δόθηκε, μπορούμε να επικαλεστούμε την αρχή της επαλληλίας, θεωρώντας ότι το σώμα εκτελεί «ταυτόχρονα τις δύο επιμέρους» παραπάνω ταλαντώσεις, τις οποίες εκτελούσε με την επίδραση μόνο μιας δύναμης. Αλλά τότε για τη σύνθετη ταλάντωση, έχουμε:

$$x = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(8\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$x = 2 \cdot 0{,}1 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\left(10\pi t + \frac{\pi}{2} - 8\pi t - \frac{\pi}{2}\right)}{2} \eta\mu \frac{\left(10\pi t + \frac{\pi}{2} + 8\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}{2} \rightarrow$$

$$x = 0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi t) \cdot \eta\mu\left(9\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(S.I.)} \quad (1)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δείχνει ότι η συνισταμένη κίνηση έχει συχνότητα 4,5Hz, αλλά το πλάτος μεταβάλλεται συνημιτονοειδώς με το χρόνο, παρουσιάζοντας διακροτήματα.

ii) Για την περίοδο του διακροτήματος ισχύει:

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} = \frac{1}{\left|\frac{8\pi}{2\pi} - \frac{10\pi}{2\pi}\right|} = 1s$$

iii) Ως «πλάτος» της σύνθετης κίνησης ορίζεται η ποσότητα:

$$A' = |0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi t)|$$

α) τη στιγμή $t_0=0$, έχουμε:

$$A'_0 = |0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi t)| = 0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu(0) = 0{,}2m \text{ και}$$

$$x_0 = 0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi t) \cdot \eta\mu\left(9\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(9\pi 0 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}2m$$

β) τη στιγμή $t_1=0{,}5s$, έχουμε:

$$A'_1 = |0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi t)| = 0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ και}$$

$$x_1 = 0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi t) \cdot \eta\mu\left(9\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot \eta\mu\left(\frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

γ) τη στιγμή $t_1=1s$, έχουμε:

$$A'_1 = |0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi t)| = |0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi)| = 0{,}2m \text{ και}$$

$$x_1 = 0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi t) \cdot \eta\mu\left(9\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}2 \cdot (-1) \cdot \eta\mu\left(9\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +0{,}2m$$

iv) Για τις φάσεις των δύο επιμέρους ταλαντώσεων έχουμε:

α) τη στιγμή $t_0=0$, έχουμε:

$$\varphi_1 = 8\pi t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ και } \varphi_2 = 10\pi t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \text{ οπότε } \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0$$

β) τη στιγμή $t_1=0{,}5s$, έχουμε:

$$\varphi_1 = 8\pi t + \frac{\pi}{2} = 4{,}5\pi \text{ (rad) και } \varphi_2 = 10\pi t + \frac{\pi}{2} = 5{,}5\pi \text{ (rad)}, \text{ οπότε } \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi \text{ (rad)}$$

γ) τη στιγμή $t_1=1s$, έχουμε:

$$\varphi_1 = 8\pi t + \frac{\pi}{2} = 8{,}5\pi \text{ (rad) και } \varphi_2 = 10\pi t + \frac{\pi}{2} = 10{,}5\pi \text{ (rad)}, \text{ οπότε } \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \text{ (rad)}$$

> Μπορούμε να διαπιστώσουμε, ότι στην περίπτωση της σύνθεσης δύο ταλαντώσεων με διαφορετικές συχνότητες, η διαφορά φάσης μεταξύ τους, δεν παραμένει σταθερή αλλά αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου. Αλλά τότε κάθε στιγμή, που η διαφορά φάσης μεταξύ των επιμέρους ταλαντώσεων είναι άρτιο πολλαπλάσιο του π (Δφ=2kπ), το πλάτος γίνεται μέγιστο και ίσο με 2 Α, ενώ τις χρονικές στιγμές όπου η διαφορά φάσης είναι ίση με περιττό πολλαπλάσιο του π (Δφ=(2k+1)π), τότε το πλάτος μηδενίζεται.

v) Τη στιγμή t_3=0,25 s η απομάκρυνση του σώματος είναι:

$$x_3 = 0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi t)\cdot\eta\mu\left(9\pi t+\frac{\pi}{2}\right)=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{4})\cdot\eta\mu\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow$$

$$x_3 = 0{,}2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\eta\mu\left(\frac{11\pi}{4}\right)=0{,}1\sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=0{,}1m$$

Εξάλλου από την αρχή της επαλληλίας έχουμε:

$$\upsilon=\upsilon_1+\upsilon_2=0{,}1\cdot 8\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(8\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+0{,}1\cdot 10\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow$$

$$\upsilon=0{,}8\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{8\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{10\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=0+\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(3\pi)=-3{,}14m/s$$

vi) Στην περίπτωση αυτή:

$$x=0{,}1\cdot\eta\mu(8\pi t)+0{,}1\cdot\eta\mu(10\pi t)=2\cdot 0{,}1\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{(10\pi t-8\pi t)}{2}\eta\mu\frac{(10\pi t+8\pi t)}{2}\rightarrow$$

$$x=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi t)\cdot\eta\mu(9\pi t)\quad\text{(S.I.)}\quad(2)$$

Αλλά τότε, ξανά $A'=|0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi t)|$ και:

α) τη στιγμή t_0=0, έχουμε:

$$A'_0=|0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi t)|=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(0)=0{,}2m \text{ και}$$

$$x_0=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi t)\cdot\eta\mu(9\pi t)=0{,}2\cdot\eta\mu(9\pi 0)=0m$$

β) τη στιγμή t_1=0,5s, έχουμε:

$$A'_1=|0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi t)|=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \text{ και}$$

$$x_1=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi t)\cdot\eta\mu(9\pi t)=0\cdot\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2}\right)=0m$$

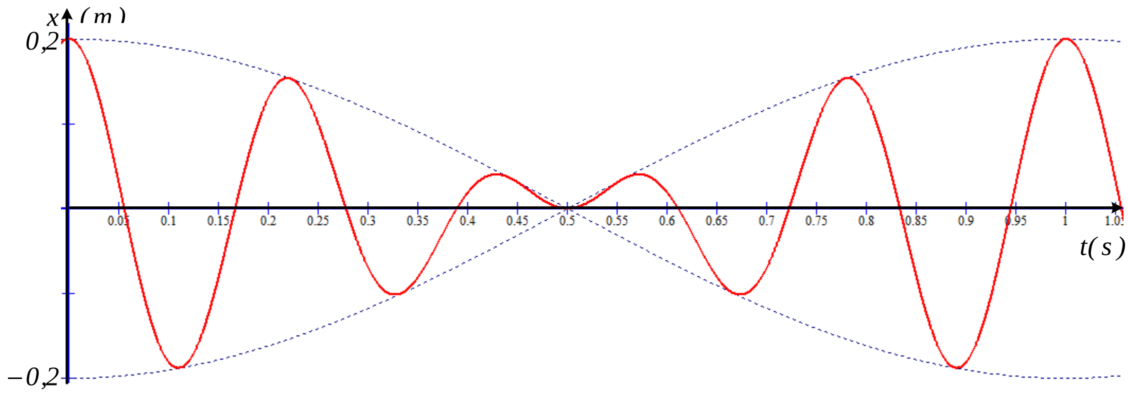
γ) τη στιγμή t_2=1s, έχουμε:

$$A'_1=|0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi t)|=|0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi)|=0{,}2m \text{ και}$$

$$x_1=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi t)\cdot\eta\mu(9\pi t)=0{,}2\cdot(-1)\cdot\eta\mu(9\pi)=0m$$

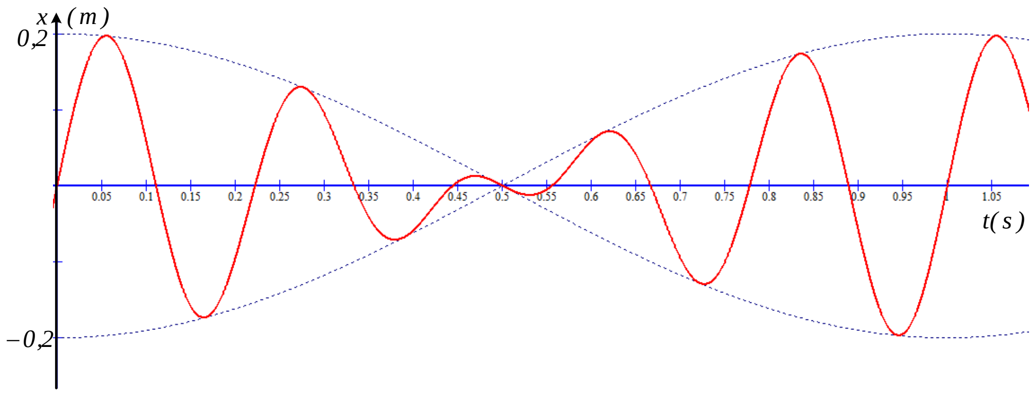
Σχόλια.

1) Αν πάρουμε τη γραφική παράσταση της αρχικής απομάκρυνσης, από την σχέση (1), σε συνάρτηση με το χρόνο, θα έχουμε το διάγραμμα:



Όπου μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τις χρονικές στιγμές $t_0=0$ και $t_2=1s$, το πλάτος γίνεται μέγιστο και ταυτόχρονα η απομάκρυνση είναι ίση με 0,2m.

Αν όμως, σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της εξίσωσης (2) του vi) ερωτήματος, θα πάρουμε:



Αξίζει να επισημανθεί ότι στην περίπτωση αυτή το «πλάτος» γίνεται μέγιστο και ίσο με 0,2m, τις ίδιες χρονικές στιγμές (0s και 1s), αλλά τις στιγμές αυτές το σώμα βρίσκεται στη θέση x=0. (Στην πραγματικότητα η περιβάλλουσα της γραφικής παράστασης της κίνησης γίνεται μέγιστη τις στιγμές $t_0=0$ και $t_2=1s$).

2) Την ταχύτητα τη στιγμή t_3 την υπολογίσαμε χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας για τις δυο ταλαντώσεις και όχι την εξίσωση (1), από την οποία μπορούσε να υπολογιστεί με μια παραγώγιση…

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης