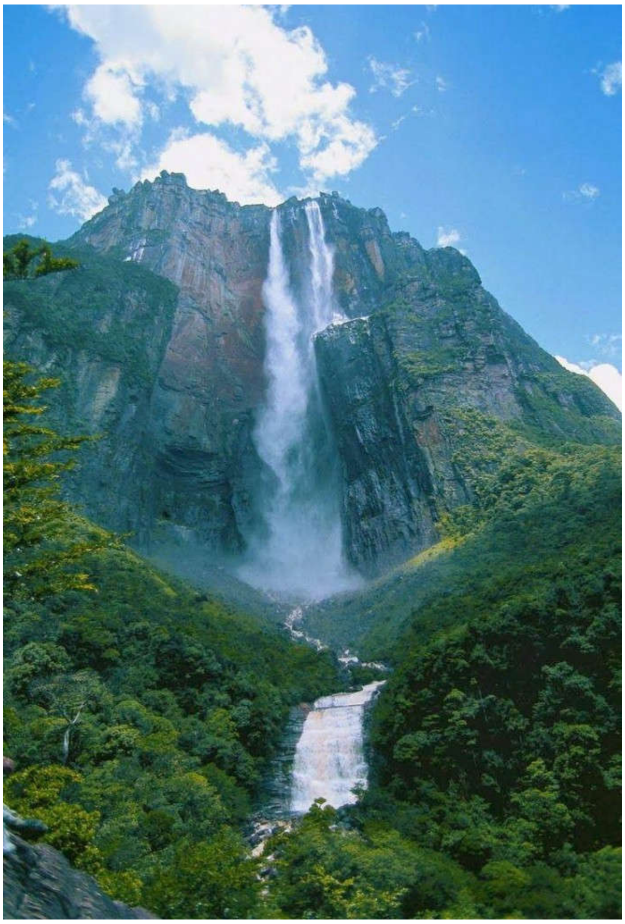
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ - Μέρος Β'



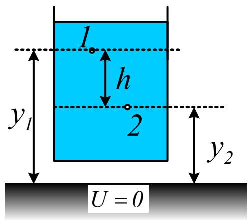
Καταρράκτης στη Βενεζουέλα

Ροή ρευστού σε πεδίο βαρύτητας

Η ***διαφορά στις τιμές της πίεσης ενός αρχικά ακίνητου ρευστού*** έχει ως ***ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ*** – κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις* – τη ***ροή***.

Ο ***οριζόντιος άνεμος*** και το αρχικά ακίνητο ***νερό που αρχίζει να κυλάει σε οριζόντιο έδαφος*** έχουν ως ***αιτία*** μια ***διαφορά πιέσεων***.

(*****) Όταν η διαφορά στις τιμές της πίεσης **δεν** οφείλεται σε υψομετρική διαφορά των σημείων

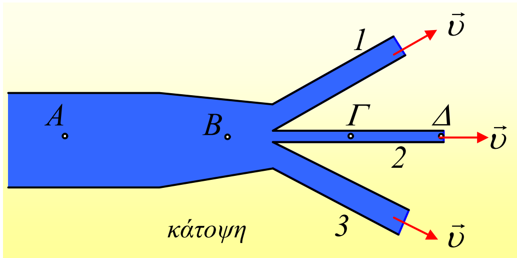


α. Πρέπει να τονιστεί ό,τι ***«τα δύο σημεία του ρευστού στα οποία μετράμε την πίεση βρίσκονται στο ίδιο υψόμετρο»***. Αυτό διότι σε ακίνητο υγρό στο πεδίο βαρύτητας η πίεση χαμηλά είναι μεγαλύτερη από την πίεση σε ένα σημείο ψηλότερα. Η διαφορά αυτή όμως ***δεν συνιστά αιτία για ροή***, αντίθετα όταν έχει ορισμένη τιμή, $p_2 - p_1 = \rho g h$, όπου h η υψομετρική διαφορά των σημείων, περιγράφει την ισορροπία του υγρού. Το ίδιο ισχύει και για τα αέρια.

β. Σε ένα ***οριζόντιο*** ρεύμα ***σταθερής διατομής***** μολονότι ***ρέει*** το νερό ***οι πιέσεις δύο σημείων ίδιου βάθους δεν διαφέρουν***. Η ***αιτία*** όμως που το ***κάποτε ακίνητο νερό «ξεκίνησε» να ρέει*** είναι κάποια ***διαφορά πιέσεων που εκδηλώθηκε*** πιθανά γιατί η πηγή βρισκόταν σε κάποιο υψόμετρο και τώρα το νερό ρέει σε οριζόντιο επίπεδο.

(**) όπου το νερό ρέει με ***σταθερή*** ταχύτητα

Το διπλανό σχήμα, δείχνει ένα τμήμα ενός ***οριζόντιου*** συστήματος ύδρευσης που καταλήγει σε τρεις σωλήνες. Στα σημεία Γ και Δ ισχύει: $p_Γ = p_Δ$ αφού τα σημεία αυτά βρίσκονται σε σωλήνα σταθερής διατομής, αλλά στα Α και Β ισχύει: $p_A > p_B$ [(1)] , αφού βρίσκονται σε τμήματα σωλήνα διαφορετικής διατομής, με τη διατομή στο Β μικρότερη από τη διατομή στο Α.

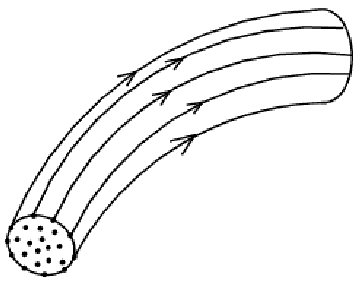


(1) Αιτιολογείται με βάση την εξίσωση ***Bernoulli*** που θα δούμε στη συνέχεια

Με απλά λόγια : «***η διαφορά πιέσεων είναι προϋπόθεση για να συμβεί ροή σε ακίνητο ρευστό***, όπως μία ασκούμενη δύναμη είναι προϋπόθεση για να ξεκινήσει ένα ακίνητο σώμα, ***ενώ δεν είναι αναγκαία σε μια ευθύγραμμη ομαλή κίνησή του***».

Οι έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε τη ***ροή*** των ρευστών είναι οι ***ρευματικές γραμμές***, η ***φλέβα***, η ***παροχή*** μιας φλέβας και το ***πεδίο ταχυτήτων***. Το πεδίο ταχυτήτων και οι ρευματικές γραμμές είναι έννοιες αντίστοιχες με τις «πεδίο δυνάμεων» και «δυναμικές γραμμές» στη θεωρία πεδίων.

Η ***ρευματική γραμμή*** - streamline- είναι ***γεωμετρική έννοια της Φυσικής***, είναι κάτι αντίστοιχο με την έννοια δυναμική γραμμή σε ηλεκτροστατικό πεδίο. ***Ορίζεται ως γραμμή σε κάθε σημείο της οποίας η διεύθυνση της ταχύτητας του αντίστοιχου σωματίδιου ρευστού*** (fluid particle) ***είναι εφαπτομένη***. Δύο ρευματικές γραμμές ποτέ δεν τέμνονται. Κάτι παρόμοιο συμβαίνει και με δύο δυναμικές γραμμές. Ειδικά στη ***μόνιμη*** ροή και ***μόνο σε αυτή***, η ***ρευματική γραμμή συμπίπτει με την τροχιά*** ενός σωματιδίου ρευστού. Σε επίπεδο εμπειρίας συμπίπτει, προσεγγιστικά, με τη τροχιά της κίνησης που θα εκτελεί ένα ρίνισμα φελλού



Η έννοια ***φλέβα*** ή ***σωλήνας ροής*** - flow tube - δεν είναι ποσότητα ρευστού είναι ένα ***γεωμετρικό σχήμα με μορφή σωλήνα*** ορισμένου σχήματος μέσα στο οποίο ***σε κάθε χρονική στιγμή βρίσκεται ρευστό ορισμένου όγκου*** ή ένα σύνολο σωματιδίων ρευστού, τα οποία ***την επόμενη στιγμή δεν είναι τα ίδια αλλά είναι ίσα σε σύνολο***, δεδομένου ότι ορισμένα έχουν βγει και ορισμένα έχουν εισέλθει στη φλέβα.

Τα σύνορα ενός τέτοιου γεωμετρικού σωλήνα συνίστανται από ρευματικές γραμμές. ***Τα σύνορα δεν μπορούν να παραβιαστούν από ρευστό*** και η φλέβα συμπεριφέρεται σαν ένας πραγματικός σωλήνας του ίδιου σχήματος. Το ρευστό εισέρχεται από το ένα άκρο της φλέβας και εξέρχεται από το άλλο.

Ως έννοια η ***παροχή αναφέρεται σε φλέβα υγρού*** και η τιμή της – αν είναι χρονικά σταθερή - υπολογίζεται σαν το πηλίκο του όγκου υγρού που ρέει από μια διατομή της φλέβας[2] προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα . Συμβολίζεται με το γράμμα Π και η εξίσωση $\boldsymbol{\Pi = \Delta V/\Delta t}$ – αν η τιμή της είναι χρονικά σταθερή- είναι η ***εξίσωση ορισμού*** της έννοιας.

(2) Η διατομή της φλέβας πρέπει να λαμβάνεται κάθετα στη ρευματική γραμμή

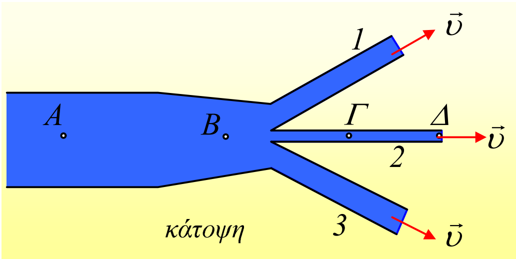
Σε φαινόμενα ροής με υγρά ασυμπίεστα ισχύει ό,τι η παροχή κατά μήκος της φλέβας έχει την ίδια τιμή. Ας υποθέσουμε ότι στο ένα άκρο μιας φλέβας σε χρόνο Δt **εισέρχεται νερό** όγκου ΔV_1 , όπου $\Delta V_1 = A_1\Delta x_1$, ενώ με βάση τον ορισμό της ταχύτητας $\Delta x_1 = \upsilon_1 \Delta t$, άρα $\Delta V_1 = A_1\upsilon_1\Delta t$. Με βάση τον ορισμό της πυκνότητας ρ η μάζα Δm που ***εισέρχεται*** στη φλέβα σε χρόνο Δt είναι ίση με $\Delta m_1 =\rho_1 \Delta V_1 =\rho_1 A_1 \upsilon_1\Delta t$ και αντίστοιχα η μάζα Δm_2 που ***εξέρχεται*** από τη φλέβα ***στον ίδιο χρόνο*** θα είναι $\Delta m_2 =\rho_2\Delta V_2=\rho_2A_2\upsilon_2\Delta t$ Αποδεχόμενοι το νόμο Διατήρησης της μάζας κατά την εξέλιξη της ροής καταλήγουμε στην ισότητα $\boldsymbol{\rho_1A_1\upsilon_1\Delta t= \rho_2A_2\upsilon_2\Delta t}$ και τέλος αποδεχόμενοι την ασυμπιεστότητα του ρευστού $(\boldsymbol{\rho_1=\rho_2})$ καταλήγουμε στην ισότητα $\boldsymbol{A_1\upsilon_1=A_2\upsilon_2}$ για δύο **οποιεσδήποτε** διατομές A_1 και A_2**.**

Με τη μορφή αυτή η εξίσωση λέγεται ***«εξίσωση της συνέχειας»*** και συνιστά ***νόμο για τη ροή*** ενός ιδανικού ρευστού. ***Απορρέει από την ασυμπιεστότητα*** – την αποδοχή δηλαδή ότι πρόκειται για ροή κατά την οποία η πυκνότητα δεν αλλοιώνεται - σε συνδυασμό με τον νόμο για τη Διατήρηση της μάζας. Κατά τη ροή αυτή για οποιαδήποτε εγκάρσια διατομή μιας φλέβας **το γινόμενο ταχύτητας και εμβαδού διατομής είναι σταθερό**. Όταν ανοίγουμε τη βρύση και τρέχει το νερό η ταχύτητα μιας ποσότητας νερού είναι όλο και μεγαλύτερη- το επιβάλλει η βαρύτητα - με συνέπεια το εμβαδόν διατομής να είναι όλο και μικρότερο και η φλέβα να μας φαίνεται πιο στενή.

Εξίσωση της συνέχειας: Στη ροή κατά την οποία η πυκνότητα του ρευστού δεν μεταβάλλεται, για οποιαδήποτε εγκάρσια διατομή μιας φλέβας **το γινόμενο ταχύτητας και εμβαδού διατομής είναι σταθερό: Αυ=σταθ.** ή $A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2$ για δύο **οποιεσδήποτε** διατομές A_1 και A_2

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Το παρακάτω σχήμα, δείχνει ένα τμήμα ενός οριζόντιου συστήματος ύδρευσης που καταλήγει σε τρεις σωλήνες, από τους οποίους το νερό εκρέει με την ίδια ταχύτητα υ. Το νερό θεωρείται ιδανικό ρευστό και η ροή μόνιμη και στρωτή, σε όλο το μήκος της σωληνώσεως.



Ο σωλήνας 1 έχει διατομή A_1 , ο σωλήνας 2 διατομή A_2 ενώ ο σωλήνας 3 διατομή A_3 , όπου $A_2 < A_1 < A_3$

α) Να συγκρίνετε τις παροχές στους σωλήνες 1,2,3

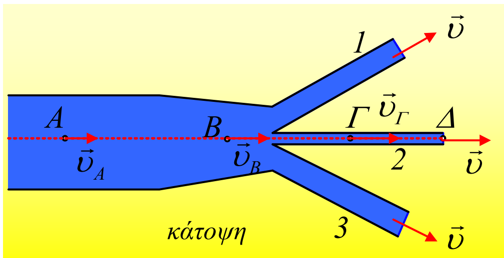
β) Να υπολογίσετε την παροχή στη διατομή του σωλήνα που βρίσκεται το σημείο Α

γ) Να συγκρίνετε τις ταχύτητες του ρευστού στις διατομές του σωλήνα, που βρίσκονται τα σημεία Α, Β

Απάντηση

α) Επειδή $A_2 < A_1 < A_3 \Rightarrow A_2 \upsilon < A_1 \upsilon < A_3 \upsilon \Rightarrow \boldsymbol{\Pi_2 < \Pi_1 < \Pi_3}$

β) Από το νόμο της συνέχειας (διατήρηση της μάζας) για την παροχή στην εγκάρσια διατομή που βρίσκεται το σημείο Β ισχύει: $\boldsymbol{\Pi_B = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3}$



Όμως, στη ροή κατά την οποία η πυκνότητα του ρευστού δεν μεταβάλλεται, για οποιαδήποτε εγκάρσια διατομή η παροχή παραμένει σταθερή:

$$\boldsymbol{\Pi_A = \Pi_B} = A_2 \upsilon + A_1 \upsilon + A_3 \upsilon = (A_2 + A_1 + A_3)\upsilon$$

γ) Από την εξίσωση της συνέχειας $\boldsymbol{\Pi_A = \Pi_B} \Rightarrow A_A \upsilon_A = A_B \upsilon_B$ Αλλά με βάση το σχήμα, ο σωλήνας έχει μεγαλύτερη διατομή στο Α, οπότε το νερό θα ρέει με μικρότερη ταχύτητα : $A_A > A_B \Rightarrow \upsilon_A < \upsilon_B$

Τα μοντέλα ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ – steady flow και ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ - laminar flow

Τα δύο μοντέλα ***δεν*** ταυτίζονται απόλυτα. Για λόγους διδακτικής δεοντολογίας παρουσιάζουμε το *μοντέλο μιας ροής η οποία είναι στρωτή και «μόνιμη»*, ***πράγμα που σημαίνει ότι η ταχύτητα κάθε υλικού σημείου του ρευστού εξαρτάται μόνο από τη θέση και όχι από τον χρόνο**** ή το πεδίο ταχυτήτων είναι χρονικά σταθερό, κάτι σαν το χρονικά σταθερό ηλεκτροστατικό πεδίο.

Το ***steady flow (μόνιμη ροή)*** αποδίδεται στη γλώσσα μας και ως **σταθερή ροή**

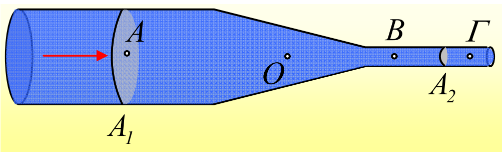
Το μοντέλο **laminar flow** (***στρωτή ροή***) περιγράφεται με τη σχετική ολίσθηση των στρωμάτων του ρευστού η οποία εξελίσσεται χωρίς «εμπόδια».

(***)Μια ροή λέγεται ***μόνιμη, όταν η ταχύτητα σε ΕΝΑ σημείο μιας ρευματικής γραμμής, είναι σταθερή και ανεξάρτητη του χρόνου.*** Αυτό ***δεν*** σημαίνει ότι ένα σωματίδιο ρευστού, όταν βρίσκεται στο σημείο αυτό, δεν μπορεί να έχει επιτάχυνση. ***Επιτάχυνση μπορεί να έχει το σωματίδιο, αλλά όχι το γεωμετρικό σημείο.*** Δηλαδή ***αν κάποια στιγμή στο σημείο αυτό βρίσκεται ένα σωματίδιο ρευστού Α και έχει ταχύτητα υ_1, μια επόμενη χρονική στιγμή, θα βρίσκεται ένα άλλο σωματίδιο ρευστού Β, το οποίο θα έχει επίσης ταχύτητα υ_1***

Αντίθετα ***στη μη μόνιμη ροή υπάρχει και επιτάχυνση του γεωμετρικού σημείου***, με την έννοια ότι ***αν κάποια στιγμή στο σημείο αυτό βρίσκεται ένα σωματίδιο ρευστού Α και έχει ταχύτητα υ_1, μια επόμενη χρονική στιγμή, θα βρίσκεται ένα άλλο σωματίδιο ρευστού Β, το οποίο θα έχει ταχύτητα υ_2, όπου $\upsilon_2>\upsilon_1$*** (ίσως και $\upsilon_2<\upsilon_1$ αν έχουμε επιβράδυνση).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο παρακάτω σχήμα εμφανίζεται ένα τμήμα ενός οριζόντιου σωλήνα, εντός του οποίου έχουμε μια στρωτή ροή ενός ιδανικού ρευστού, σταθερής παροχής.



i) Για τις ταχύτητες ροής στα σημεία Α, Β και Γ ισχύει:

α) $\upsilon_A=\upsilon_B=\upsilon_\Gamma$, β) $\upsilon_A>\upsilon_B>\upsilon_\Gamma$, γ) $\upsilon_A<\upsilon_B=\upsilon_\Gamma$.

ii) Ένα σωμάτιο ρευστού κατά την κίνησή του από το σημείο Β στο σημείο Γ επιταχύνεται ή όχι;

iii) Μπορεί να υπάρχει η ροή στο σωλήνα αυτό, αν $p_A=p_\Gamma$;

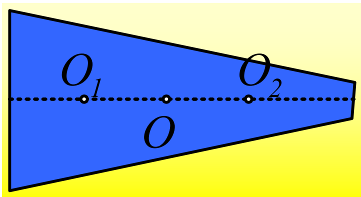
iv) Ένα σωμάτιο ρευστού στη θέση Ο επιταχύνεται ή όχι; Αν ναι πού οφείλεται η επιτάχυνσή του;

Απαντήσεις

i) Ισχύει ότι: $A_1 \cdot \upsilon_A = A_2 \cdot \upsilon_B = A_2 \cdot \upsilon_\Gamma$ και $A_1 > A_2$, οπότε: $\upsilon_A < \upsilon_B = \upsilon_\Gamma$

ii) Αφού η ροή είναι στρωτή και μόνιμη, η ταχύτητα του ρευστού στο σημείο Β είναι σταθερή. Σε όλα όμως τα σημεία του σωλήνα μεταξύ των Β και Γ η ταχύτητα είναι ίδια, αφού η διατομή δεν αλλάζει. Άρα και στο Γ η ταχύτητα ροής παραμένει σταθερή, συνεπώς το σωμάτιο ρευστού που κινείται από το Β στο Γ δεν επιταχύνεται

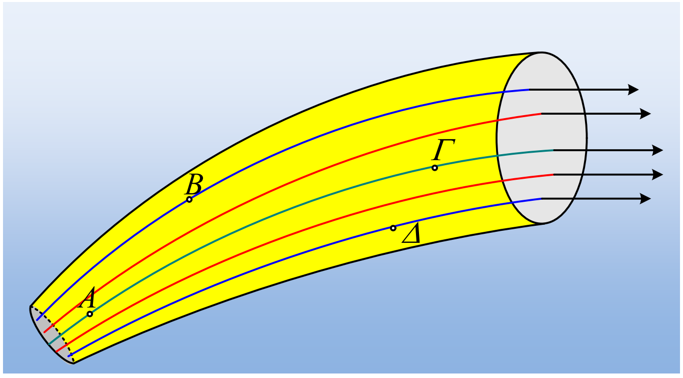
iii) Γνωρίζουμε ότι σε ένα οριζόντιο ρεύμα σταθερής διατομής, μολονότι ρέει το ρευστό, οι πιέσεις δύο σημείων ίδιου βάθους δεν διαφέρουν. Στον οριζόντιο σωλήνα όμως που εξετάζουμε, η διατομή αλλάζει, άρα οι πιέσεις θα είναι διαφορετικές: $p_A \neq p_\Gamma$



iv) Εφόσον η παροχή Π=Α·υ παραμένει σταθερή, στις περιοχές που μειώνεται το εμβαδόν της διατομής, όπως στο σημείο Ο, η ταχύτητα ροής αυξάνεται. Έτσι αν πάρουμε τα σημεία O_1 και O_2, όπως στο σχήμα, από το νόμο τον νόμο της συνέχειας έχουμε: $A_{O_1} \cdot \upsilon_1 = A_{O_2} \cdot \upsilon_2 \rightarrow \dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \dfrac{A_{O_2}}{A_{O_1}} < 1$ Δηλαδή ένα σωματίδιο ρευστού κινούμενο από το σημείο O_1 στο σημείο O_2 η ταχύτητά του θα αυξάνεται, πράγμα που σημαίνει ότι επιταχύνεται.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Στο σχήμα δίνεται ένα τμήμα οριζόντιου σωλήνα, το οποίο αποτελεί μια φλέβα Ι, εντός της οποίας ρέει ιδανικό υγρό, με σταθερή παροχή και κάποιες ρευματικές γραμμές του. Αφού το υγρό είναι ιδανικό, η ροή του είναι στρωτή και όχι τυρβώδης. Μπορούμε να θεωρήσουμε μια δεύτερη φλέβα ΙΙ, η οποία θα περικλείεται από την πρώτη;



Κάποια στιγμή ένα σωμάτιο βρίσκεται στο σημείο Β. Να σχεδιάστε την ταχύτητα του σωματίου αυτού.

Μπορεί μετά από λίγο το σωμάτιο αυτό να περάσει από το σημείο Γ;

Ένα σωμάτιο $Σ_1$ σε μια στιγμή t_0 περνάει από το σημείο Α, ενώ τη στιγμή t_1, φτάνει στο σημείο Γ, ενώ στο σημείο Α βρίσκεται πια ένα δεύτερο σωμάτιο $Σ_2$.

α) Το σωμάτιο $Σ_1$ ή το $Σ_2$ έχει μεγαλύτερη ταχύτητα στη θέση Α;

β) Τη στιγμή t_1 ποιο από τα δύο σωμάτια έχει μεγαλύτερη ταχύτητα;

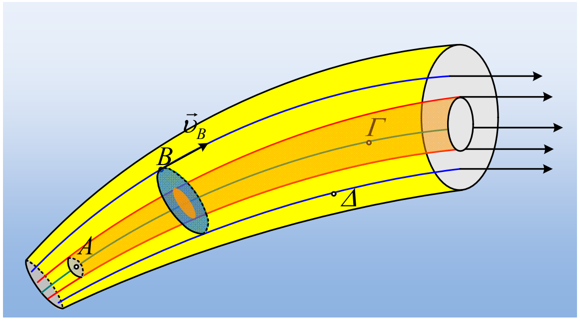
γ) Κατά την μετακίνηση του $Σ_1$ από το Α στο Γ ασκήθηκε πάνω του δύναμη ή όχι; Αν ναι, από πού μπορεί να ασκήθηκε η δύναμη αυτή; Το έργο της δύναμης αυτής είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν;

Απάντηση

Στο ***εσωτερικό της φλέβας Ι*** μπορούμε να θεωρήσουμε και άλλες φλέβες ***μικρότερης διατομής***, στις οποίες ***το υγρό που θα ρέει θα έχει μικρότερη παροχή***.

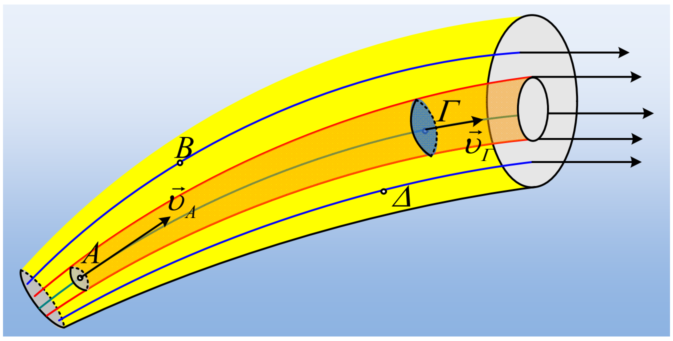
Μπορούμε π.χ. να θεωρήσουμε τη φλέβα ΙΙ, η οποία περικλείεται ανάμεσα στις κόκκινες ρευματικές γραμμές ή τη φλέβα ΙΙΙ, η οποία περικλείεται ανάμεσα στις μπλε ρευματικές γραμμές και η οποία περικλείει τη φλέβα ΙΙ.

Η ταχύτητα ***κάθε*** σωμάτιου στη θέση Β, είναι ***εφαπτόμενη στη ρευματική γραμμή*** που περνά από το Β.



Το σωμάτιο αυτό ***θα κινηθεί κατά μήκος της γραμμής αυτής*** και προφανώς ***δεν θα βρεθεί ποτέ*** στη ρευματική γραμμή που ***διέρχεται από το Γ***, αφού για να μπορούσε να συμβεί αυτό, ***θα έπρεπε να τέμνονται οι ρευματικές γραμμές.***

α) Σε κάθε σημείο μιας φλέβας, αντιστοιχεί μια ταχύτητα ροής, ***σταθερή και ανεξάρτητη του σωματίου*** που περνά κάθε στιγμή από το σημείο αυτό. Έτσι ***κάθε σωμάτιο που περνά από το σημείο Α*** έχει την ***ίδια ταχύτητα*** $\vec{\upsilon}_A$, εφαπτόμενη της ρευματικής γραμμής, ανεξάρτητα αν από το σημείο αυτό περνά το Σ_1 ή το Σ_2



β) Το σωμάτιο που περνά από το σημείο Γ έχει μια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\Gamma$ πως στο παραπάνω σχήμα. Όμως από το νόμο της συνέχειας έχουμε: $\Pi_A=\Pi_\Gamma \rightarrow A_A\cdot\upsilon_A=A_\Gamma\cdot\upsilon_\Gamma$ όπου A_A και A_Γ οι διατομές της φλέβας Ι στα σημεία Α και Γ.

Αλλά με βάση το σχήμα $A_A < A_\Gamma$, οπότε $\upsilon_A > \upsilon_\Gamma$ ή διαφορετικά την στιγμή t_1 το σωμάτιο Σ_2 στη θέση Α έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το Σ_1 στη θέση Γ.

γ) Καθώς το σωμάτιο Σ1 μετακινείται από το Α στο Γ, η ταχύτητά του μειώνεται και το σωμάτιο επιβραδύνεται. Εφόσον συμβαίνει αυτό σημαίνει ότι δέχτηκε μια δύναμη. Όμως εφόσον η κίνηση γίνεται οριζόντια (δεν παίζει κάποιο ρόλο το βάρος), η δύναμη αυτή ασκήθηκε στο σωμάτιο, από το υπόλοιπο υγρό, δηλαδή τα διπλανά του σωμάτια λόγω μεταβολής της πίεσης του υγρού.

Αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα Έργου Ενέργειας για το σωματίδιο Σ_1, θα έχουμε:

$$\Delta K = W_F \rightarrow W_F = \frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 < 0$$

Daniel Bernoulli. -Ένας ***νόμος*** για τη ροή των ρευστών-

Κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής το άθροισμα της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου, της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου και της πίεσης ενός ρευστού διατηρείται σταθερό.

Με σύμβολα, για δύο σημεία το 1 και το 2 της ***ίδιας*** ρευματικής γραμμής ισχύει:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h_2$$

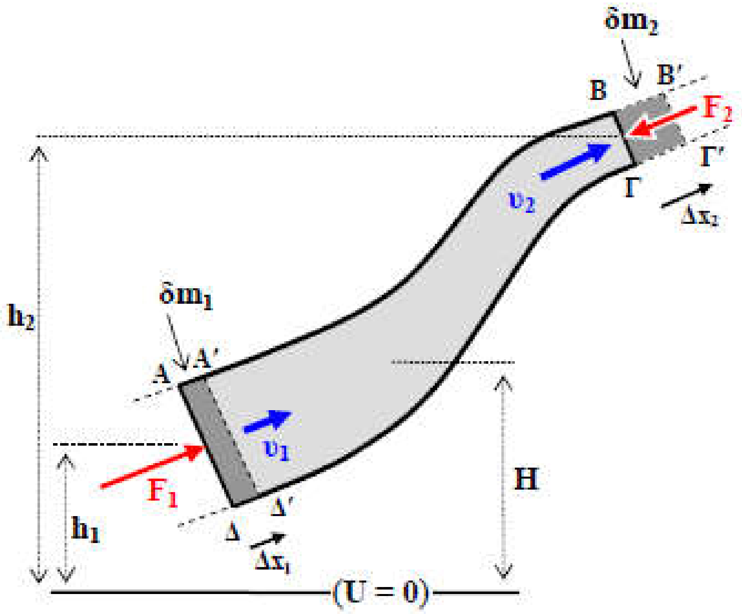
Ο ***νόμος Bernoulli*** μπορεί να αποδειχθεί με το θεώρημα έργου ενέργειας.

Ιδανικό υγρό ρέει μέσα σε ένα σωλήνα. Η ροή είναι στρωτή και μόνιμη, δηλαδή η ταχύτητα ροής σε κάθε θέση παραμένει σταθερή. Θεωρούμε τμήμα ΑΒΓΔ της φλέβας του υγρού μέσα στο σωλήνα. Το τμήμα αυτό δέχεται τις εξής δυνάμεις:

α) Το βάρος του

β) Τις πλευρικές δυνάμεις από τα τοιχώματα που είναι κάθετες στη ροή, άρα και στη μετατόπιση του τμήματος ΑΒΓΔ

γ) Τις δυνάμεις F_1 και F_2 από τα εξωτερικά τμήματα της φλέβας



Σε μικρό χρονικό διάστημα δt το τμήμα αυτό θα έχει μετακινηθεί σε νέα θέση Α'Β'Γ'Δ'. Οι δύο θέσεις της ποσότητας του υγρού ***επικαλύπτονται κατά το τμήμα Α'ΒΓΔ'***, η μάζα δε του υγρού ***που βρίσκεται σε αυτό το τμήμα έχει ορισμένη σταθερή κινητική και δυναμική ενέργεια.*** Το υγρό, μάζας δm_1, που ***βρισκόταν*** στη θέση ΑΑ'Δ'Δ ***έχει μεταφερθεί λόγω της ροής*** στη θέση ΒΒ'Γ'Γ ως μάζα δm_2, όπου λόγω ***συνέχειας*** ισχύει: $\boldsymbol{\delta m_1 = \delta m_2 = \delta m}$

Η ***μεταβολή της κινητικής ενέργειας*** της μάζας αυτής είναι:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}\delta m \cdot \upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\delta m \cdot \upsilon_1^2 = \frac{1}{2}\delta m \cdot (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) = \frac{1}{2}\rho \delta V \cdot (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$$

Το ***έργο του βάρους*** της μάζας αυτής είναι:

$$W_B = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} = \delta m \cdot g \cdot (h_1 - h_2) \Rightarrow W_B = \rho \cdot \delta V \cdot g \cdot (h_1 - h_2)$$

Το ***έργο της δύναμης*** F_1 είναι: $W_{F_1} = F_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 \Rightarrow W_{F_1} = p_1 \cdot \delta V_1$

ενώ το ***έργο της δύναμης*** F_2 είναι: $W_{F_2} = -F_2 \cdot \Delta x_2 = -p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 \Rightarrow W_{F_2} = -p_2 \cdot \delta V_2$

Όμως: $\delta V_1 = \delta V_2 = \Delta V$ Οπότε από το ΘΕΕ για τη μάζα δm έχουμε:

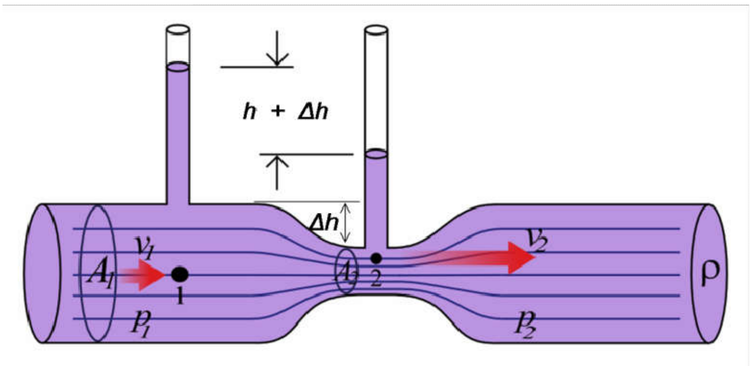
$$\Delta K = W_B + W_{F_1} + W_{F_2} \Rightarrow \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) = \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot (h_1 - h_2) + p_1 \cdot \Delta V - p_2 \cdot \Delta V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho \cdot (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) = \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2) + p_1 - p_2 \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h_2$$

Για ***οριζόντια ρευματική γραμμή*** , όπου $h_1 = h_2$, ο νόμος **Bernoulli** εκφράζεται ως: **Το άθροισμα πίεσης και κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου διατηρείται σταθερό.**

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$$

Η επισήμανση οδηγεί στο «**όταν αυξάνεται η ταχύτητα του ρευστού ελαττώνεται η πίεση**»



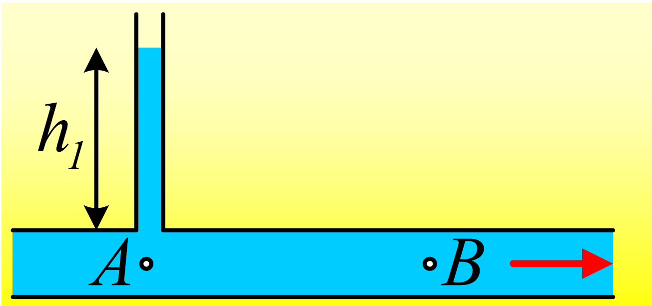
Για το ρευστό στο παραπάνω σωλήνα ισχύει:

$A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2$ Όμως: $A_1 > A_2$, άρα $\upsilon_1 < \upsilon_2$

Ισχύει όμως: $p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$, άρα $p_1 > p_2$ γι αυτό η στάθμη του υγρού στο σωλήνα (1) έχει μεγαλύτερο ύψος από τη στάθμη στο σωλήνα (2)

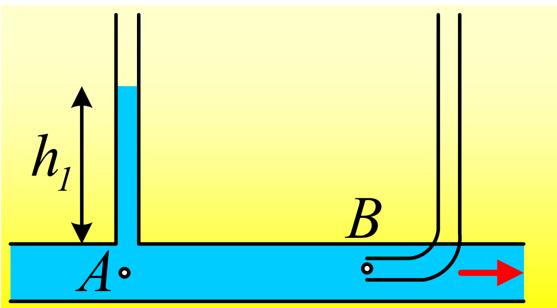
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Στο επόμενο σχήμα έχουμε μια μόνιμη και στρωτή ροή νερού, το οποίο θεωρούμε ιδανικό ρευστό, εντός ενός οριζόντιου σωλήνα σταθερής διατομής. Στη θέση Α έχει συνδεθεί κατακόρυφος λεπτός σωλήνας, στον οποίο το νερό ανέρχεται κατά h_1.



α) Να υπολογίσετε την πίεση του νερού στο σημείο Β

β) Παρεμβάλλουμε έναν δεύτερο σωλήνα στη θέση Β, όπως στο επόμενο σχήμα. Η ροή εξακολουθεί να είναι στρωτή και μόνιμη, με την ίδια παροχή.



Το νερό στον δεύτερο σωλήνα θα ανέβει:

I) στο ίδιο ύψος II) σε μικρότερο ύψος III) σε μεγαλύτερο ύψος

σε σχέση με το υγρό στον πρώτο σωλήνα

Απάντηση

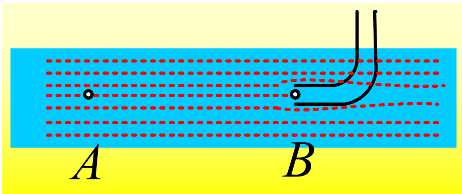
α) Από το νόμο της συνέχειας και λόγω της σταθερής διατομής του σωλήνα ισχύει: $υ_A=υ_B$

Η πίεση στο σημείο Α, είναι ίση πρακτικά με την πίεση στο κάτω σημείο του κατακόρυφου σωλήνα, ο οποίος περιέχει νερό σε ισορροπία, συνεπώς: $\mathrm{p}_{A} = p_{at} + \rho g h_1$

Αλλά από το νόμο Bernoulli κατά της μήκος της ρευματικής γραμμής που συνδέει τα σημεία Α και Β, έχουμε:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho \upsilon_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho \upsilon_B^2 \to p_A = p_B$$

β) Η τοποθέτηση του σωλήνα στο σημείο Β, έχει ως αποτέλεσμα να τροποποιήσει τη ροή, αφού θα δημιουργήσει αποκοπή της ροής στο Β, δηλαδή η ταχύτητα ροής στο Β θα μηδενιστεί: $\upsilon_B=0$

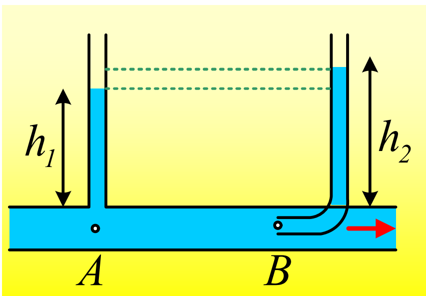


Από το νόμο του Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και Β, θα έχουμε:

$$\mathrm{p}_A + \frac{1}{2}\rho \upsilon_A^2 = p'_B + \frac{1}{2}\rho \upsilon_B^2 \to p'_B = \mathrm{p}_A + \frac{1}{2}\rho \upsilon_A^2 \to p'_B > \mathrm{p}_A$$

Το νερό θα ανέλθει στον δεύτερο σωλήνα σε ύψος h_2, έτσι ώστε στο σημείο Β, το οποίο είναι στο κάτω μέρος μιας αντίστοιχης στήλης νερού σε ισορροπία, να ισχύει:

$$\mathrm{p}'_B = p_{at} + \rho g h_2$$



Δηλαδή ισχύει:

$$p'_B > \mathrm{p}_A \Rightarrow p_{at} + \rho g h_2 > p_{at} + \rho g h_1 \Rightarrow h_2 > h_1$$

Τα φαινόμενα και οι νόμοι – Ροόμετρο *Venturi*

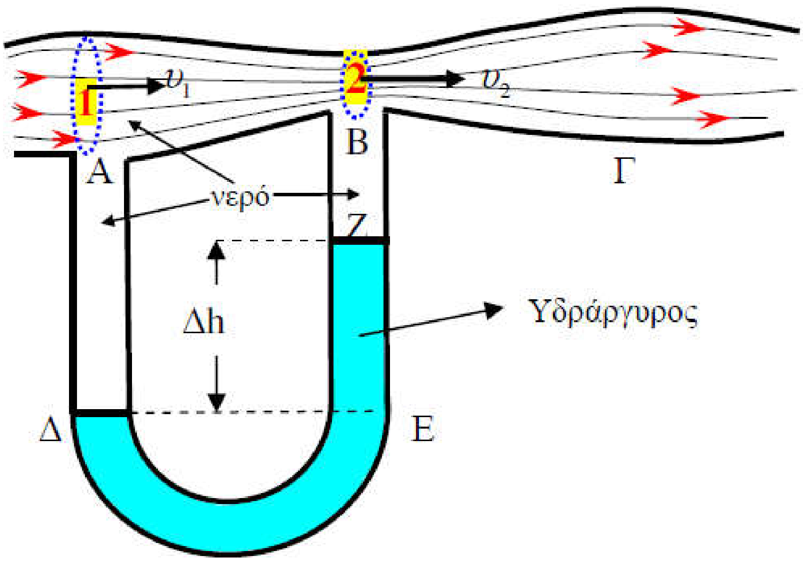
Θα εξετάσουμε την λειτουργία του οργάνου που μετρά παροχή και ταχύτητα ροής – όργανο που έχει και το όνομα του Ιταλού Τζοβάνι Μπατίστα ***Βεντούρι (Venturi)***

Για το ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ « ***στρωτή ροή ιδανικού ρευστού***» οι Νόμοι της Συνέχειας και του Bernoulli, εκφράζονται από τις σχέσεις:

$A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2$ και $p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$

Για το ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ «ισορροπία της ποσότητας υδραργύρου» ο θεμελιώδης Νόμος της ισορροπίας δίνει: $p_1 - p_2 = \rho_{υδρ} g \Delta h$.

Η ***υψομετρική διαφορά*** που παρουσιάζει ο υδράργυρος ***οφείλεται στις διαφορετικές πιέσεις που παρουσιάζει το νερό στις διατομές Α και Β.*** Από την εξίσωση του Bernoulli προκύπτει ότι στο σημείο (1) η πίεση είναι μεγαλύτερη από ότι στο (2). Έτσι ***το νερό στο σημείο Α πιέζει τον υδράργυρο προς τα κάτω***. Αντίθετα ***στο Β η πίεση είναι μικρότερη*** και έτσι ***ο υδράργυρος ανεβαίνει προς το Β***.



Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli στα σημεία 1 και 2 έχουμε:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_1^2 + \rho_\nu g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_2^2 + \rho_\nu g y_2 \overset{y_1 = y_2}{\Longrightarrow} p_1 + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho_\nu\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)$$

Το τμήμα του υδραργύρου βρίσκεται σε ισορροπία. Σύμφωνα με την ***αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων*** αν πάρουμε δύο σημεία Δ και Ε που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο εντός του ίδιου υγρού, θα ισχύει $p_\Delta = p_E$.

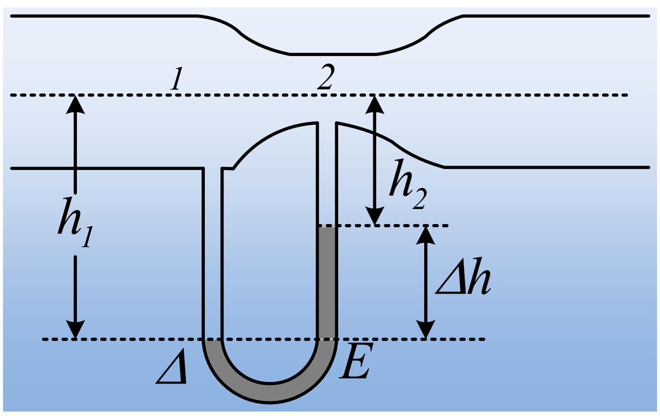
Αρχικά ***δε θα λάβουμε υπόψη*** την πίεση που ασκεί η στήλη ΑΔ και ΒΖ του νερού. Αυτό είναι επιτρεπτό διότι η διαφορά αυτή επιφέρει μικρή αλλαγή στις πιέσεις p_Δ και p_E και τελικά μικρή απόκλιση στο Δh.

$$p_\Delta = p_E \Rightarrow p_1 = p_2 + \rho_{\upsilon\delta} g \Delta h \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho_{\upsilon\delta} g \Delta h$$

Από τις παραπάνω σχέσεις: $\frac{1}{2}\rho_\nu\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) = \rho_{\upsilon\delta} g \Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2}\frac{\rho_\nu}{\rho_{\upsilon\delta} g}\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)$

Αν όμως πρέπει να τη λάβουμε υπόψη, τότε θα έχουμε:

$$p_\Delta = p_E \Rightarrow p_1 + \rho_\nu g h_1 = p_2 + \rho_\nu g h_2 + \rho_{\upsilon\delta} g (h_1 - h_2) \Rightarrow$$
$$p_1 - p_2 = \rho_{\upsilon\delta} g (h_1 - h_2) - \rho_\nu g (h_1 - h_2) \Rightarrow$$
$$p_1 - p_2 = \rho_{\upsilon\delta} g \Delta h - \rho_\nu g \Delta h \Rightarrow p_1 - p_2 = (\rho_{\upsilon\delta} - \rho_\nu) g \Delta h$$

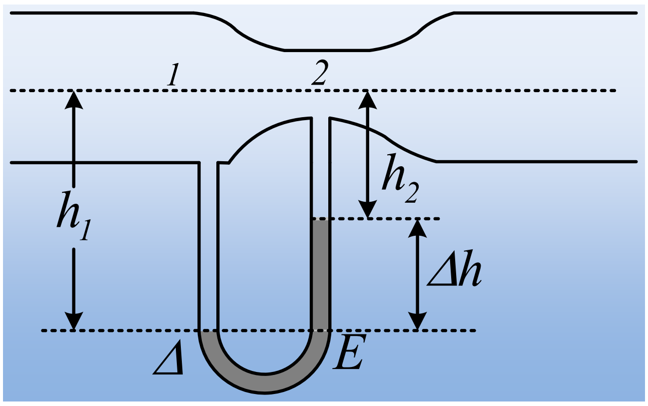


Τελικά θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}\rho_\nu\left(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2\right)=(\rho_{\upsilon\delta}-\rho_\nu)g\Delta h \Rightarrow \Delta h=\frac{1}{2}\frac{\rho_\nu}{(\rho_{\upsilon\delta}-\rho_\nu)g}\left(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2\right)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Σε ένα βεντουρίμετρο, νερό πυκνότητας ρ ρέει στο σωλήνα με εμβαδό διατομής A_1. Στο λαιμό το εμβαδό της διατομής μειώνεται σε A_2 αντίστοιχα. Το υγρό στο σωλήνα σχήματος U του μανόμετρου είναι υδράργυρος και έχει πυκνότητα $\rho_{\upsilon\delta}$. Να δείξετε ότι η παροχή του σωλήνα ροής δίνεται από τη σχέση από τη σχέση: $\Pi = A_1A_2\sqrt{\frac{2(\rho_{\upsilon\delta}-\rho)g\Delta h}{\rho(A_1^2-A_2^2)}}$



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli για το νερό στα σημεία 1 και 2 έχουμε:

$$p_1+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2+\rho g y_1=p_2+\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2+\rho g y_2 \xRightarrow{y_1=y_2} p_1+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \Rightarrow p_1-p_2=\frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2\right)$$

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε: $A_1\upsilon_1=A_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2=\frac{A_1\upsilon_1}{A_2}$

Αντικαθιστώντας στην πιο πάνω σχέση έχουμε:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)$$

Από την αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων για τα σημεία Δ και Ε έχουμε:

$$\begin{aligned}
&p_\Delta = p_E \Rightarrow p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2 + \rho_{\upsilon\delta} g(h_1 - h_2) \Rightarrow \\
&p_1 - p_2 = \rho_{\upsilon\delta} g(h_1 - h_2) - \rho g(h_1 - h_2) \Rightarrow \\
&p_1 - p_2 = \rho_{\upsilon\delta} g\Delta h - \rho g\Delta h \Rightarrow p_1 - p_2 = (\rho_{\upsilon\delta} - \rho) g\Delta h
\end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη στις πιο πάνω σχέσεις έχουμε:

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) = (\rho_{\upsilon\delta} - \rho) g\Delta h \Rightarrow \upsilon_1^2 = \frac{2(\rho_{\upsilon\delta} - \rho) g\Delta h}{\rho(A_1^2 - A_2^2)} A_2^2 \Rightarrow \upsilon_1 = A_2\sqrt{\frac{2(\rho_{\upsilon\delta} - \rho) g\Delta h}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

Η παροχή κατά μήκος του σωλήνα νερού είναι σταθερή και δίνεται από τη σχέση:

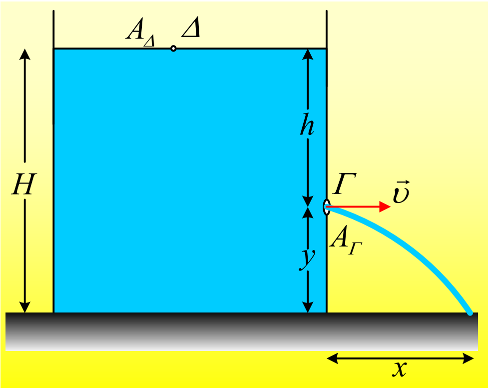
$$\Pi = A_1\upsilon_1 \Rightarrow \Pi = A_1 A_2\sqrt{\frac{2(\rho_{\upsilon\delta} - \rho) g\Delta h}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Ένα ανοικτό κυλινδρικό δοχείο περιέχει νερό και η στάθμη του Δ βρίσκεται σε ύψος Η από τον πυθμένα. Το δοχείο είναι τοποθετημένο σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο. Στη μία του πλευρά ανοίγουμε οπή Γ σε βάθος h από την ελεύθερη στάθμη του νερού.

Θεωρούμε ότι το εμβαδό της οπής Γ είναι πολύ μικρότερο από το εμβαδό της ελεύθερης επιφάνειας του νερού: $A_\Gamma << A_\Delta$

Ι) Βρείτε την απόσταση χ από τη βάση του δοχείου, στην οποία η φλέβα του νερού που εκρέει από την οπή στο Γ συναντά το έδαφος.



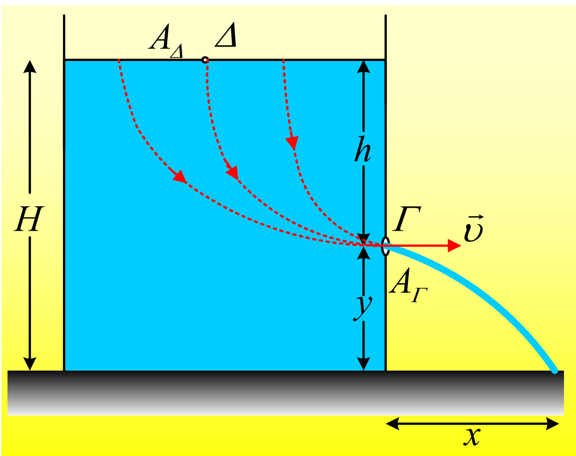
Μπορεί η οπή να ανοιχτεί σε άλλο βάθος h_2, ώστε η φλέβα που εκρέει από την οπή αυτή να συναντά το έδαφος στο ίδιο σημείο με τη φλέβα που εκρέει από την οπή στο Γ;

ΙΙ) Σε ποιο βάθος πρέπει να ανοιχτεί η οπή, ώστε η φλέβα του νερού που εκρέει από την οπή στο Γ, να συναντήσει το έδαφος στη μέγιστη απόσταση από τη βάση του δοχείου; Ποια είναι η απόσταση αυτή;

ΙΙΙ) Έστω ότι την οπή την ανοίγουμε σε βάθος h=H/2 από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Ποιο το εμβαδό της διατομής της φλέβας οριακά πριν φθάσει στο έδαφος σε σχέση με το εμβαδό διατομής A_Γ της οπής στο Γ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ι) Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για δύο σημεία Γ και Δ που βρίσκονται πάνω στην ίδια ρευματική γραμμή: $p_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Delta^2 + \rho g h = p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + 0$



Οι εξωτερικές όμως πιέσεις στα σημεία Γ και Δ είναι ίσες: $p_\Gamma = p_\Delta = p_{atm}$

Επίσης, αφού το εμβαδό της οπής Γ είναι πολύ μικρότερο από το εμβαδό της ελεύθερης επιφάνειας του νερού: $A_\Gamma \ll A_\Delta \Rightarrow \frac{A_\Gamma}{A_\Delta} \ll 1$ και επειδή ο λόγος είναι θετικός: $\frac{A_\Gamma}{A_\Delta} \approx 0$, οπότε παίρνοντας την εξίσωση της συνέχειας έχουμε:

$$A_\Gamma \upsilon_\Gamma = A_\Delta \upsilon_\Delta \Rightarrow \upsilon_\Delta = \frac{A_\Gamma}{A_\Delta}\upsilon_\Gamma \approx 0$$

Τελικά η εξίσωση Bernoulli γράφεται:

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 = \rho g h \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{2gh}$$

Δηλαδή η ταχύτητα εκροής του νερού από οπή που βρίσκεται σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια, δίνεται από τη σχέση: $\upsilon = \sqrt{2gh}$

Η τελευταία σχέση αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του **θεωρήματος Torricelli** , σύμφωνα με το οποίο:

«Η ταχύτητα εκροής υγρού από στόμιο που βρίσκεται σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, είναι ίση με την ταχύτητα που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από ύψος h»

Αν το δοχείο ήταν κλειστό στην πάνω έδρα του, οπότε η πίεση θα ήταν διαφορετική της ατμοσφαιρικής, $p_\Delta \neq p_\Gamma = p_{atm}$, τότε η εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Γ και Δ θα γραφόταν:

$$p_\Delta + 0 + \rho g h = p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + 0 \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{2gh + \frac{2(p_\Delta - p_\Gamma)}{\rho}}$$

δηλαδή ***η ταχύτητα εκροής εξαρτάται από τη διαφορά πίεσης $p_\Delta - p_\Gamma$*** (διαφορική πίεση) και ***από το βάθος h στο οποίο βρίσκεται η οπή από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού*** στη δεξαμενή.

Κάθε σωματίδιο-ρευστού που εκρέει από την οπή στο Γ ***εκτελεί οριζόντια βολή***, η οποία εξετάζεται ***ως επαλληλία δύο ανεξάρτητων κινήσεων***: μιας ευθύγραμμης ομαλής στον οριζόντιο άξονα χ και μιας ευθύγραμμης ομαλά μεταβαλλόμενης στον κατακόρυφο άξονα y.

Άξονας χ

$$a_x = 0$$
$$\upsilon_x = \upsilon_\Gamma = \sqrt{2gh}$$
$$x = \upsilon_x t \Rightarrow x = \sqrt{2gh} \cdot t$$

Άξονας y

$$a_y = g$$
$$\upsilon_y = a_y t \Rightarrow \upsilon_y = gt$$
$$y = \frac{1}{2} a_y t^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} g t^2$$

Τη στιγμή που το σωματίδιο-ρευστού φθάνει στο έδαφος, στον κατακόρυφο άξονα έχει μετατοπιστεί κατά y, οπότε: $y = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Rightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2y}{g}}$

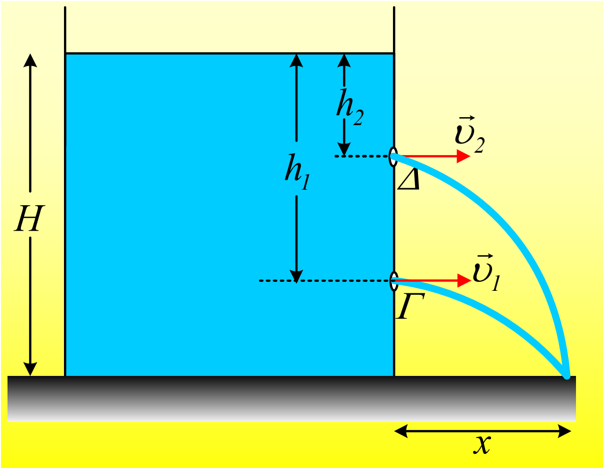
Την ίδια στιγμή στον οριζόντιο άξονα έχει μετατοπιστεί κατά:

$$x = \sqrt{2gh} \cdot t_{ολ} \Rightarrow x = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}} \Rightarrow x = \sqrt{4h \cdot y} \Rightarrow x = 2\sqrt{h \cdot (H-h)}$$

Αυτή ***είναι*** και ***η απόσταση από τη βάση του δοχείου***, στην οποία η φλέβα του νερού που εκρέει από την οπή στο Γ ***συναντά το έδαφος***.

Έστω ότι η οπή στο Γ βρίσκεται σε βάθος h_1 από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Τότε η φλέβα του νερού συναντά το έδαφος σε απόσταση $x_1 = 2\sqrt{h_1 \cdot (H-h_1)}$

Αν ανοίξουμε μια άλλη οπή σε σημείο που βρίσκεται σε βάθος h_2 από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, η φλέβα του νερού θα συναντά το έδαφος σε απόσταση $x_2 = 2\sqrt{h_2 \cdot (H-h_2)}$



Θέλουμε όμως:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow h_1(H-h_1) = h_2(H-h_2) \Rightarrow h_1H - h_1^2 = h_2H - h_2^2 \Rightarrow H(h_1-h_2) = h_1^2 - h_2^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H(h_1-h_2) = (h_1-h_2)(h_1+h_2) \Rightarrow h_1+h_2 = H$$

Δηλαδή, για να συναντούν οι φλέβες του νερού το έδαφος στην ίδια απόσταση από το δοχείο, θα πρέπει οι δύο οπές να ανοιχτούν σε σημεία που ισαπέχουν από τις βάσεις της στήλης του νερού, αφού: $h_1 + h_2 = H \Rightarrow h_2 = H - h_1$

II) Γνωρίζουμε ότι ***δύο αριθμοί που έχουν σταθερό άθροισμα, έχουν μέγιστο γινόμενο, όταν οι αριθμοί είναι ίσοι.***

Με βάση αυτή την ιδιότητα, η απόσταση από τη βάση του δοχείου $x = 2\sqrt{h\cdot(H-h)}$, γίνεται ***μέγιστη*** ό-ταν: $h = H - h$, αφού $h + (H-h) = H = \sigma\tau\alpha\theta$

Τότε όμως: $h = H - h \Rightarrow 2h = H \Rightarrow h = \dfrac{H}{2}$, οπότε: $x_{\max} = 2\sqrt{\dfrac{H}{2}(H-\dfrac{H}{2})} \Rightarrow x_{\max} = 2\dfrac{H}{2} = H$

Ισοδύναμα:

Ο χρόνος που χρειάζεται για να φθάσει στο έδαφος κάθε σωματίδιο-ρευστού που εκρέει από την οπή στο Γ είναι: $y = \dfrac{1}{2}gt_{o\lambda}^2 \Rightarrow t_{o\lambda} = \sqrt{\dfrac{2y}{g}}$, φθάνει δε σε οριζόντια απόσταση:

$$x=\sqrt{2gh}\cdot t_{ολ}\Rightarrow x=\sqrt{2gh}\cdot\sqrt{\frac{2y}{g}}\Rightarrow x=\sqrt{2g(H-y)}\cdot\sqrt{\frac{2y}{g}}\Rightarrow x^2=2y\cdot 2(H-y)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2=4yH-4y^2\Rightarrow 4y^2-4H\cdot y+x^2=0$$

Η δευτερόβαθμια ως προς y εξίσωση, έχει πραγματικές λύσεις αν:

$$\Delta\geq 0\Rightarrow 16H^2-16x^2\geq 0\Rightarrow H^2\geq x^2\Rightarrow x\leq H\Rightarrow x_{\max}=H$$

Αντικαθιστώντας έχουμε: $4y^2-4H\cdot y+H^2=0$

Οπότε: Δ=0 και $y=\frac{4H}{8}\Rightarrow y=\frac{H}{2}$

Άρα, όταν η οπή ανοιχτεί σε ύψος $y=\frac{H}{2}$ από το έδαφος, δηλαδή σε βάθος $h=\frac{H}{2}$ από την ελεύθερη επιφάνεια, η φλέβα νερού που εκρέει από την οπή στο Γ θα συναντήσει το έδαφος στη μέγιστη δυνατή απόσταση από τη βάση του δοχείου: $x_{\max}=H$

III) Υπολογίζουμε την ταχύτητα με την οποία φθάνει στο έδαφος κάθε σωματίδιο-ρευστού:

$$\frac{1}{2}dm\cdot\upsilon_{Γ}^2+dm\cdot g\frac{H}{2}=\frac{1}{2}dm\cdot\upsilon_1^2 \quad \text{Όμως} \quad \upsilon_{Γ}=\sqrt{2g\frac{H}{2}}\Rightarrow\upsilon_{Γ}=\sqrt{gH}$$

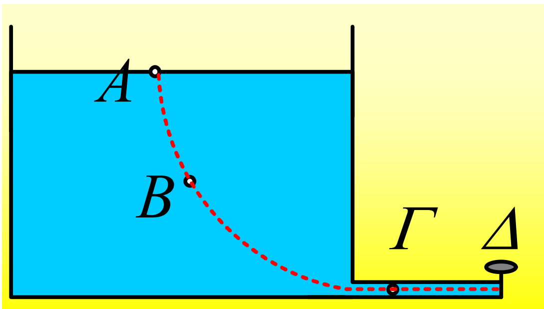
Αντικαθιστώντας έχουμε: $gH+gH=\upsilon_1^2\Rightarrow\upsilon_1=\sqrt{2gH}$

Η παροχή της φλέβας του νερού στον αέρα είναι σταθερή, οπότε:

$$A_{Γ}\upsilon_{Γ}=A_1\upsilon_1\Rightarrow A_{Γ}\sqrt{gH}=A_1\sqrt{2gH}\Rightarrow A_{Γ}=A_1\sqrt{2}\Rightarrow A_1=\frac{A_{Γ}\sqrt{2}}{2}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7

Μια μεγάλη δεξαμενή είναι γεμάτη νερό μέχρι ύψους h, ενώ ένα σωλήνας που συνδέεται στον πυθμένα, έχει μήκος L, διατομή A και κλείνεται με στρόφιγγα στο άκρο Δ, όπως στο σχήμα. Το νερό πυκνότητας ρ, θεωρείται ιδανικό ρευστό και η ροή στρωτή και μόνιμη με τη στρόφιγγα ανοικτή, ενώ στο σχήμα έχει χαραχθεί μια ρευματική γραμμή ΑΒΓΔ.



Α) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος, με την ***στρόφιγγα ανοικτή***:

α) Για τις τιμές της πίεσης στα σημεία Δ και Α ισχύει: $p_Δ - p_Α = ρgh$

β) Η πίεση στο σημείο Γ είναι ίση με την πίεση στο Δ

γ) Η ταχύτητα εκροής του υγρού στο άκρο Δ, είναι ίση με την ταχύτητα που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από ύψος h και έχει τιμή $υ = \sqrt{2gh}$

Β) Για τις τιμές της πίεσης στα σημεία Γ και Β, με τη στρόφιγγα ανοικτή, ισχύει:

ι) $p_Γ - p_Β = ρgh_{ΓΒ}$ ιι) $p_Γ - p_Β > ρgh_{ΓΒ}$ ιιι) $p_Γ - p_Β < ρgh_{ΓΒ}$

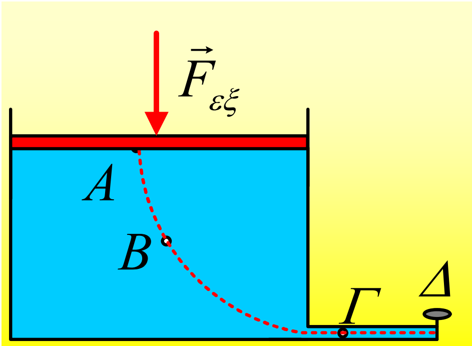
όπου $h_{ΓΒ}$ η υψομετρική διαφορά των σημείων Γ και Β

Γ) Μόλις κλείσουμε τη στρόφιγγα, η πίεση στο σημείο Δ:

α) θα παραμείνει ίδια β) θα αυξηθεί γ) θα μειωθεί

Δ) Αν πιέσουμε με τη βοήθεια ενός εμβόλου την πάνω επιφάνεια της δεξαμενής, με τη στρόφιγγα ανοικτή, η ποσότητα του νερού που θα βγαίνει από την διατομή στο Δ:

α) θα παραμείνει ίδια β) θα αυξηθεί γ) θα μειωθεί



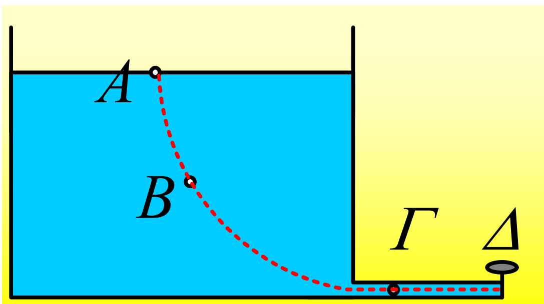
Απάντηση

Α) (α) Λάθος Εφόσον η στρόφιγγα είναι ανοικτή ισχύει: $p_A=p_\Delta=p_{ατμοσφαιρική}$

(β) Σωστή Αφού ο οριζόντιος σωλήνας έχει σταθερή διατομή, η ταχύτητα στο σημείο Γ είναι ίση με την ταχύτητα στο άκρο Δ: $\upsilon_\Gamma = \upsilon_\Delta$

Αλλά τότε από το νόμο Bernoulli, έχουμε:

$$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 = p_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Delta^2 \Rightarrow p_\Gamma = p_\Delta = p_{atm}$$



(γ) Σωστή Αυτό προκύπτει από το θεώρημα **Torricelli,** το οποίο ισχύει* με τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

i. Η τιμή της πίεσης του ρευστού στην ελεύθερη επιφάνεια (η τιμή της ατμοσφαιρικής πίεσης) είναι ίση με την τιμή της πίεσης στην εκροή . Με άλλα λόγια ***η λόγω βαρύτητας διαφορά των τιμών των ατμοσφαιρικών πιέσεων είναι αμελητέα***

ii. ***Η ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού στην ελεύθερη επιφάνεια $\upsilon_{ελ}$ είναι, σε σχέση με την ταχύτητα εκροής $\upsilon_{εκρ}$, αμελητέα , ή ακριβέστερα ισχύει $\upsilon_{εκρ}^2 - \upsilon_{ελ}^2 \approx \upsilon_{εκρ}^2$.***

Η προϋπόθεση (ii) , μέσω του νόμου της συνέχειας, ισοδυναμεί με το ***«αμελητέο» του εμβαδού της οπής σε σχέση με το εμβαδόν διατομής του δοχείου***

iii. Εκτός ***του «να θεωρείται αμελητέα η ταχύτητα $\upsilon_{ελ}$ (x,y,z,t), πρέπει ν<u>α θεωρείται αμελητέα και η χρονική παράγωγος της μεταβολής της</u> $\partial\upsilon_{ελ(z)}/\partial t = 0$ όπως και για τη χρονική παράγωγο της μεταβολής της ταχύτητας εκροής $\upsilon_{ελ}$ (x,yz,t) να ισχύει $\partial\upsilon_{εκρ(x)}/\partial t = 0$.***

(*) Απόσπασμα από σχόλιο του Ανδρέα Κασσέτα

Β) Στην περίπτωση της μόνιμης ροής ο νόμος Bernoulli για τα σημεία Γ και Β δίνει:

$$\mathrm{p}_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + 0 = p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 + \rho \mathrm{g}\mathrm{h}_{\Gamma B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{p}_\Gamma - p_B = \rho \mathrm{g}\mathrm{h}_{\Gamma B} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow \mathrm{p}_\Gamma - p_B = \rho \mathrm{g}\mathrm{h}_{\Gamma B} + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_B^2 - \upsilon_\Gamma^2)$$

Όμως $\upsilon_B < \upsilon_\Gamma$, οπότε $\upsilon_B^2 - \upsilon_\Gamma^2 < 0 \Rightarrow$ $\mathrm{p}_\Gamma - p_B < \rho \mathrm{g}\mathrm{h}_{\Gamma B}$

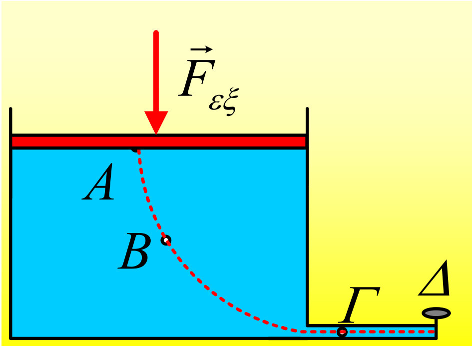
όπου $h_{ΓΒ}$ η υψομετρική διαφορά των σημείων Α και Β

Γ) Μόλις κλείσουμε τη στρόφιγγα, το νερό θα βρεθεί σε κατάσταση ισορροπίας. Τότε όμως θα έχουμε:

$$p_\Delta - p_A = \rho g h \Rightarrow p_\Delta = p_A + \rho g h \Rightarrow p_\Delta = p_{atm} + \rho g h > p_{atm}$$

Συνεπώς (β) η πίεση στο Δ θα αυξηθεί

Δ) Αν πιέσουμε με τη βοήθεια ενός εμβόλου την πάνω επιφάνεια της δεξαμενής, η ποσότητα του νερού που θα βγαίνει από την διατομή στο Δ, με τη στρόφιγγα ανοικτή, (β) θα αυξηθεί



Αν η δεξαμενή καλυπτόταν από ένα έμβολο βάρους w, στο οποίο ασκούσαμε μια εξωτερική δύναμη, τότε θα είχαμε αύξηση της πίεσης στο κάτω άκρο του εμβόλου, κατά $\frac{w+F_{\varepsilon\xi}}{A}$. Έτσι στο σημείο Α η πίεση θα αποκτούσε τιμή: $p_A = p_{at} + \frac{w+F_{\varepsilon\xi}}{A}$

Εφαρμόζοντας ξανά το νόμο Bernoulli, μεταξύ των σημείων Δ και Α, έχουμε:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + \rho gh = p_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Delta'^2 \rightarrow (p_{at} + \frac{w+F_{\varepsilon\xi}}{A}) + 0 + \rho gh = p_{at} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Delta'^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_\Delta' = \sqrt{2gh + \frac{2(w+F_{\varepsilon\xi})}{\rho A}}$$

Βλέπουμε ότι με την άσκηση της εξωτερικής δύναμης στην πάνω επιφάνεια, αυξάνεται η ταχύτητα εκροής του νερού, αφού $\sqrt{2gh + \frac{2(w+F_{\varepsilon\xi})}{\rho A}} > \sqrt{2gh}$ αλλά τότε θα αυξηθεί και η παροχή: $\Pi = A_\Delta \upsilon'_\Delta$

Επιμέλεια:

Θοδωρής Παπασγουρίδης