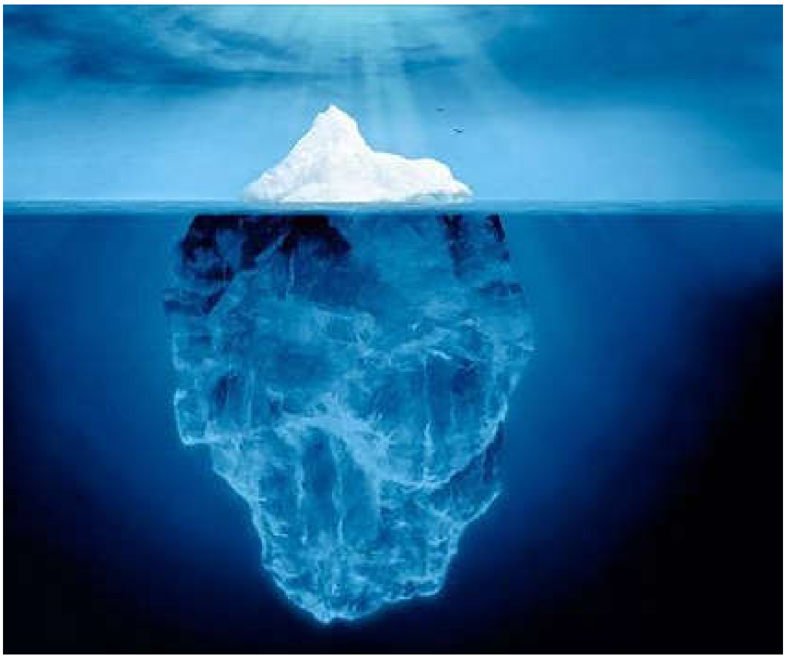
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ - ΜΕΡΟΣ Α΄

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ



ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Ως ***ρευστά*** θεωρούμε τα σώματα εκείνα, τα οποία δεν έχουν δικό τους σχήμα, αλλά παίρνουν το σχήμα του δοχείου που τα περιέχει, τέτοια είναι τα ***υγρά*** και τα ***αέρια.***

Τα ***υγρά***, για ορισμένη πάντα θερμοκρασία, έχουν σταθερό όγκο, ανεξάρτητο από την πίεση. Αυτό τα χαρακτηρίζει ως ***ασυμπίεστα***. Αντίθετα στα ***αέρια***, ο όγκος εξαρτάται από την πίεση στην οποία βρίσκονται. Αυτό τα χαρακτηρίζει ως ***συμπιεστά***.

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε ως ***ασυμπίεστο,*** το ρευστό που έχει σταθερό όγκο ανεξάρτητο από την πίεση, δηλαδή το ρευστό στο οποίο η ***πυκνότητά του είναι η ίδια σ' όλη την έκτασή του, ρ=m/V=σταθερή***

Για την περιγραφή της συμπεριφοράς των ρευστών, θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο ***«σωματίδιο-ρευστού» (fluid particle)***, αναγνωρίζοντας ότι δεν είναι σωματίδιο του μικρόκοσμου, δεν είναι λόγου χάρη μόριο, αλλά το αντίστοιχο του μοντέλου "υλικό σημείο".

Κατά την κίνηση των ρευστών αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής μεταξύ των σωματιδίων που τα αποτελούν (***εσωτερική τριβή***), αλλά και μεταξύ αυτών και των τοιχωμάτων του σωλήνα, μέσα στον οποίο πραγματοποιείται η κίνηση (***δυνάμεις συνάφειας***). Αν οι δυνάμεις αυτές υπερβούν κάποιο όριο δημιουργούνται δίνες και η ροή χαρακτηρίζεται ως ***τυρβώδης ή στροβιλώδης***.

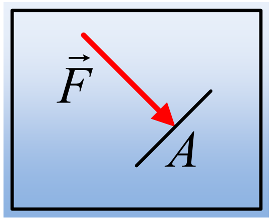
Εμείς θα περιοριστούμε στη μελέτη της ροής ασυμπίεστων ρευστών που δεν παρουσιάζουν ούτε εσωτερικές τριβές, ούτε τριβές με τα τοιχώματα του σωλήνα στον οποίο ρέουν. Τέτοια ρευστά χαρακτηρίζονται ως ***ιδανικά***. Η ροή των ιδανικών ρευστών είναι ***στρωτή***, δηλαδή ***δεν*** παρουσιάζει στροβίλους.

Πρέπει να γίνει σαφές ό,τι τόσο το ***«ασυμπίεστο ρευστό»,*** το οποίο θεωρεί αμελητέα τη μεταβολή του όγκου, όσο και το ***«ιδανικό ρευστό»,*** το οποίο θεωρεί αμελητέο το ιξώδες και τη θερμική αγωγιμότητα, αλλά και η ***«στρωτή ροή»,*** είναι ***μοντέλα*** τα οποία εμπεριέχουν τη δική τους ***αφαίρεση*** αλλά και τη δική τους ***άρνηση***.

Α) Η έννοια πίεση ρευστού

Μεγαλώσαμε μέσα στον αέρα και το γεγονός ότι ***«ο αέρας σπρώχνει»*** συνήθως δεν το νιώθουμε. Όμως ο ***αέρας πάντα σπρώχνει***. Σπρώχνει το τζάμι του παράθυρου προς τα έξω, σπρώχνει την οριζόντια επιφάνεια του νερού προς τα κάτω και το πιο εντυπωσιακό, «σπρώχνει προς τα πάνω» την οποιαδήποτε οροφή σπιτιού. Η αντίστοιχη εμπειρία ότι ***«το νερό σπρώχνει ακόμα κι αν είναι ακίνητο»*** είναι περισσότερο οικεία συνήθως από τις καταδύσεις στη θάλασσα.

Το ***«προς τα πού θα σπρώξει»*** το ρευστό, καθορίζεται από το **«πώς είναι τοποθετημένη»** η επιφάνεια μέσα σε αυτό, ενώ το **«πόσο θα σπρώξει»** καθορίζεται και από το ίδιο το ρευστό, αλλά και από το «πόση είναι» η επιφάνεια στην οποία ασκείται. Όλα αυτά εμπεριέχονται στην ***έννοια πιεστική δύναμη,*** η οποία περιγράφεται με ένα ***διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια του σώματος στο οποίο ασκείται.***



Πώς ***ορίζεται*** η τιμή της πίεσης ρευστού ***σε κάποιο σημείο Γ;***

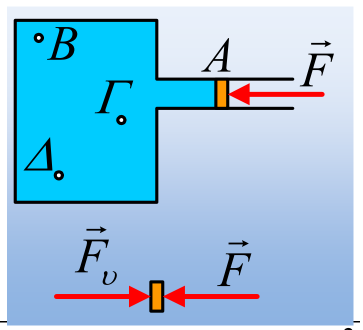
Αν λοιπόν στο εσωτερικό του ρευστού, ***στην περιοχή του σημείου Γ βρεθεί η επιφάνεια ενός αντικειμένου, το ρευστό*** θα σπρώχνει την επιφάνεια, ***θα ασκεί πιεστική δύναμη κάθετα*** στην επιφάνεια του αντικειμένου αυτού.

Το «πόσο έντονα μπορεί το υγρό στην περιοχή εκείνη να ***σπρώχνει τη μονάδα επιφάνειας*** κάθε αντικειμένου» το περιγράφουμε εισάγοντας την έννοια **«πίεση του ρευστού»** στην περιοχή εκείνη έτσι ώστε η τιμή της δύναμης να καθορίζεται **ισότιμα** *και* από την **πίεση του ρευστού** αλλά και από το **μέγεθος της επιφάνειας**. Το «ισότιμα» οδηγεί στον ορισμό:

Πιεστική δύναμη = πίεση Χ εμβαδόν επιφάνειας: F = pA,

στην οποία το **p** παριστάνει την τιμή της **πίεσης**. Η εξίσωση F = pA ή ισοδύναμα **p = F/A** είναι η **εξίσωση ορισμού της έννοιας *πίεση ρευστού.*** *Ο* ορισμός βέβαια ισχύει υπό την ***προϋπόθεση*** ότι το πηλίκο F/A **έχει την ίδια τιμή** στην περιοχή του υγρού. Σε αυστηρότερη γλώσσα, εφόσον η **πίεση αναφέρεται σε σημείο** του ρευστού, $p = dF/dA$

Η έννοια **πίεση ενός ρευστού, αναφερόμενη σε ένα σημείο του ρευστού**, συνιστά ***εντατική*** ιδιότητα του ρευστού όπως και η θερμοκρασία.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Ι) Το δοχείο του διπλανού σχήματος, βρίσκεται ***εκτός πεδίου βαρύτητας*** και κλείνεται με ένα έμβολο στο οποίο ασκούμε εξωτερική δύναμη F. ***Να δείξετε ότι κάθε σημείο του υγρού αποκτά την ίδια τιμή πίεσης*** $p = \frac{F}{A}$.

Από την ***ισορροπία του εμβόλου***, προκύπτει ότι το έμβολο δέχεται από το υγρό μια δύναμη $F_{υγρ}$, ώστε: $ΣF=0 \rightarrow F_{υγρ}=F$. Όμως ***η δύναμη αυτή που ασκεί το υγρό στο έμβολο, οφείλεται στην πίεση του υγρού,*** και ισχύει: $F_{υγρ}=p \cdot A$

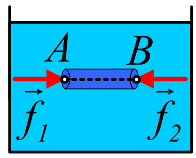
Στην πραγματικότητα δηλαδή μέσω του εμβόλου ασκείται σε κάθε σωματιδίου ρευστού εξωτερική δύναμη μέτρου F. Έτσι όμως κάθε σημείο του υγρού αποκτά την ίδια τιμή πίεσης: $p = \frac{F_{υγρ}}{A} = \frac{F}{A}$.

Ισχύει δηλαδή $p_B=p_Γ=p_Δ$.

Στην περίπτωση αυτή, μιλάμε για ***πίεση*** εξαιτίας ***εξωτερικού αιτίου***.

ΙΙ) Να δείξετε ότι ***οι πιέσεις σε δυο σημεία στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, εντός ενός υγρού σε ακινησία, είναι ίσες.***

Έστω δύο σημεία Α και Β ***στο ίδιο βάθος*** μέσα σε ένα υγρό. Αν πάρουμε την ποσότητα του υγρού ενός κυλίνδρου με βάσεις στα σημεία αυτά, εμβαδού δΑ, τότε η μάζα αυτή δέχεται από το υπόλοιπο υγρό, οριζόντιες δυνάμεις f_1 και f_2, όπως στο διπλανό σχήμα.



Αλλά αν το υγρό ηρεμεί, η μάζα αυτή του νερού ισορροπεί, οπότε:

$$ΣF_x=0 \text{ ή } f_1=f_2 \text{ ή } p_A \cdot δA = p_B \cdot δA \text{ ή } \boldsymbol{p_A=p_B}.$$

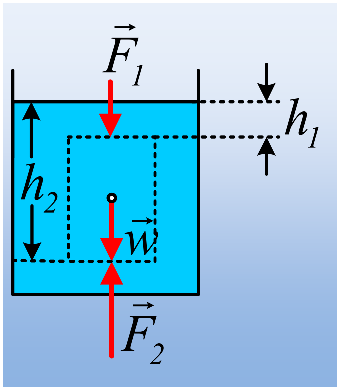
Κατά τη μελέτη των υγρών και των αερίων η **έννοια πίεση** καταφέρνει τελικά να έχει τον πρώτο λόγο στην περιγραφή, την ερμηνεία και την πρόβλεψη τόσο της **ισορροπίας** των υγρών όσο και της **σχετικής ροής** .

Β) Ισορροπία ρευστού σε πεδίο βαρύτητας

Υποθέτουμε ότι το δοχείο με το υγρό βρίσκεται σε **σύστημα αναφοράς με μηδενική επιτάχυνση.** Από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι, **όσο πιο βαθιά είναι το σημείο τόσο μεγαλύτερη είναι η πίεση**.

Έστω ότι σε ένα δοχείο, έχουμε νερό σε ηρεμία και ας ***μην*** λάβουμε υπόψη ***την ατμοσφαιρική πίεση***. Να δείξετε ότι η σχέση που συνδέει τις πιέσεις σε δύο σημεία διαφορετικού βάθους από την ελεύθερη επιφάνεια, είναι η : $\boldsymbol{p_2 - p_1 = \rho g h}$, όπου h η υψομετρική διαφορά των σημείων.

Ας πάρουμε μια ***ποσότητα νερού, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου*** με βάσεις, εμβαδού A και ύψος h, όπως στο επόμενο σχήμα.

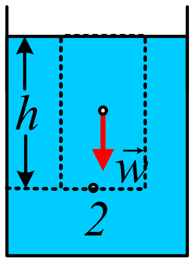


Η ποσότητα νερού στο παραλληλεπίπεδο αυτό ***ισορροπεί, με την επίδραση των δυνάμεων από το υπόλοιπο νερό,*** από το οποίο δέχεται τις δυνάμεις F_1 και F_2 του σχήματος, καθώς και δυνάμεις στις κατακόρυφες έδρες του, δυνάμεις που είναι οριζόντιες. Οι δυνάμεις αυτές έχουν μηδενική συνισταμένη, αφού ***η ποσότητα αυτή του νερού δεν επιταχύνεται οριζόντια***,.

Για τις κατακόρυφες δυνάμεις έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_2 - F_1 = w = mV = \rho g V \Rightarrow p_2 A - p_1 A = \rho g V \Rightarrow p_2 A - p_1 A = \rho g A h \Rightarrow p_2 - p_1 = \rho g h$$

όπου p_2 η πίεση σε βάθος h_2 και p_1 η πίεση σε βάθος h_1 από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού.



Η εξίσωση $\boldsymbol{p_2 - p_1 = \rho g h}$ αναφέρεται και ως ***θεμελιώδης νόμος της ισορροπίας των υγρών***.

Αν το σημείο (1) είναι η ***επιφάνεια του νερού***, τότε η παραπάνω σχέση γράφεται: $p_2 = \rho g h$

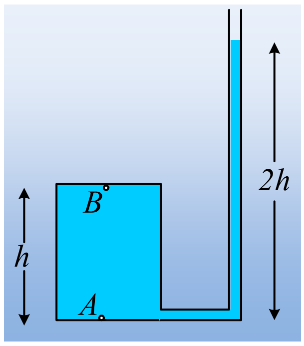
Εξάλλου από το Θεμελιώδη Νόμο Ισορροπίας των υγρών προκύπτει ό,τι ***αν το βάρος της ποσότητας του νερού είναι μηδενικό,*** δηλαδή βρίσκεται ***εκτός*** πεδίου βαρύτητας*, τότε ***οι πιέσεις εξωτερικού αιτίου,*** σε ***δύο*** σημεία ***με διαφορετικό βάθος,*** $h_2 \neq h_1$, ***θα ήταν ίσες*** .

Επίσης η σχέση $p = \rho g h$, αν ***δεν υπάρχει πίεση εξωτερικού αιτίου***, δείχνει ότι στο εσωτερικό υγρού, το οποίο ***βρίσκεται έξω από πεδίο βαρύτητας***, η πίεση είναι ***μηδενική***

(*) Αν το υγρό βρίσκεται ***εκτός πεδίου βαρύτητας***, τότε ***δεν υπάρχει και ατμοσφαιρική πίεση***, αφού τα αέρια της ατμόσφαιρας συγκρατούνται από τη βαρυτική έλξη του πλανήτη. Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο, δηλαδή ***μπορεί να μην υπάρχει ατμόσφαιρα***, άρα η ατμοσφαιρική πίεση να είναι μηδενική, αλλά ***να υπάρχει βαρύτητα***, όπως συμβαίνει στην επιφάνεια της Σελήνης.

Ερώτηση

Στο επόμενο σχήμα, ένα κυλινδρικό δοχείο ύψους h είναι γεμάτο με νερό, ενώ στη βάση του είναι συνδεδεμένος ένας σωλήνας, με κατακόρυφο τμήμα το οποίο περιέχει νερό μέχρι ύψος 2h. Τα σημεία Α και Β, είναι δυο σημεία του νερού πολύ κοντά στην κάτω και πάνω βάση του κυλίνδρου.



i) Αν το δοχείο είναι ***εκτός πεδίου βαρύτητας*** (και προφανώς μακριά από τη Γη) ισχύει:

α) $p_A = p_B$, β) $p_A = 2p_B$, γ) $p_A - p_B = \rho g h$

ii) Αν το δοχείο ***είναι στην επιφάνεια της Γης***, τότε:

α) $p_A = p_B$, β) $p_A = 2p_B$, γ) $p_A - p_B = \rho g h$ δ) $p_B = \rho g h$

όπου ρ η πυκνότητα του νερού και g η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης

iii) Αν το δοχείο ***είναι στην επιφάνεια της Σελήνης***, τότε:

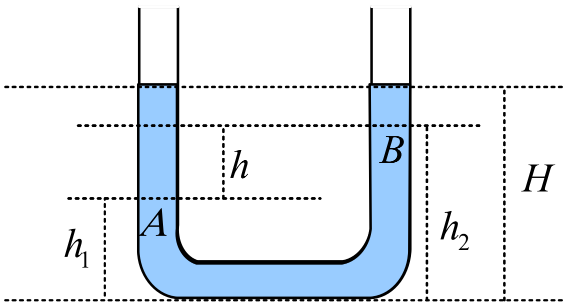
α) $p_A = p_B$, β) $p_A = 2p_B$, γ) $p_A - p_B = \rho g_\Sigma h$ δ) $p_B = \rho g_\Sigma h$

όπου ρ η πυκνότητα του νερού και g_Σ η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης, όπου ως γνωστόν δεν υπάρχει ατμόσφαιρα

Απαντήσεις i) α) $p_A = p_B = 0$ ***ii) γ)*** $p_A - p_B = \rho g h$

iii) β) $p_A = 2p_B$ και ***γ)*** $p_A - p_B = \rho g_\Sigma h$ και ***δ)*** $p_B = \rho g_\Sigma h$

Θεωρούμε στη συνέχεια σωλήνα σχήματος U, ο οποίος περιέχει υγρό πυκνότητας ρ. Η ελεύθερη στάθμη του υγρού βρίσκεται σε ύψος H, το σημείο A σε ύψος h_1 ενώ το B σε ύψος h_2 από το οριζόντιο επίπεδο αναφοράς.



Ισχύει ότι:

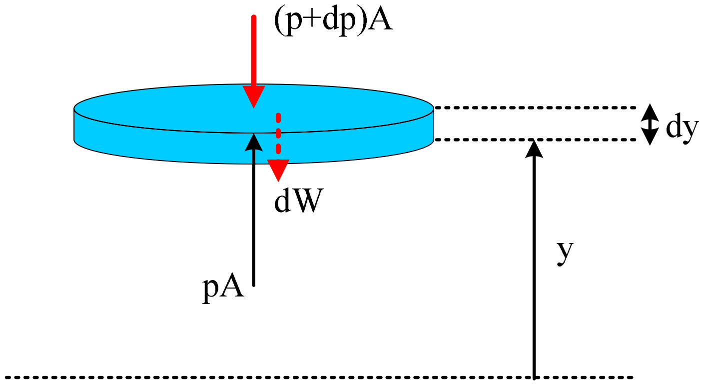
$p_A = p_{atm} + \rho g(H - h_1)$ και $p_B = p_{atm} + \rho g(H - h_2)$

Αφαιρώντας κατά μέλη: $p_A - p_B = \rho g(h_2 - h_1) \Rightarrow p_A - p_B = \rho g h$

Ακολουθεί μια διαφορετική προσέγγιση των παραπάνω, εκτός των ορίων της εξεταστέας ύλης:

Η μεταβολή της πίεσης σε ρευστό που ηρεμεί

Σε ένα ρευστό πυκνότητας ρ που ηρεμεί, κάθε τμήμα αυτού βρίσκεται σε ισορροπία. Θεωρούμε ένα στοιχειώδη όγκο του ρευστού, με σχήμα λεπτού δίσκου πάχους dy, εμβαδού επιφάνειας A, ο οποίος βρίσκεται κατά y πιο πάνω από ορισμένο επίπεδο αναφοράς. Ο όγκος αυτού του στοιχείου είναι Ady, η μάζα dm=ρAdy και το βάρος dW=ρAgdy. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο στοιχείο αυτό από το ρευστό που το περιβάλλει είναι κάθετες στην επιφάνειά του.

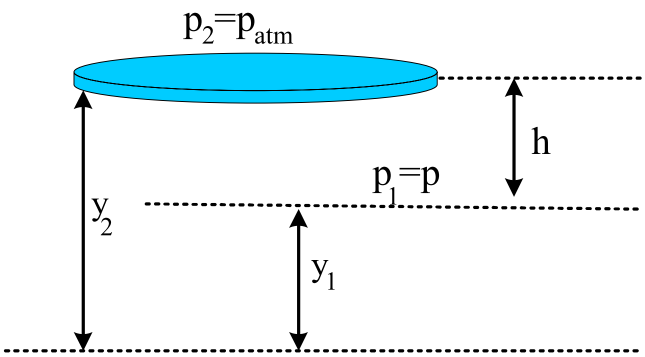


Η συνισταμένη οριζόντια δύναμη είναι μηδέν, αφού δεν υπάρχει οριζόντια επιτάχυνση. Επίσης και στην κατακόρυφη διεύθυνση η επιτάχυνση είναι μηδέν, άρα:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (p+dp)A + dW = pA \Rightarrow dpA + dW = 0 \Rightarrow dpA = -dW \Rightarrow dpA = -\rho g A dy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dp = -\rho g dy \Rightarrow \frac{dp}{dy} = -\rho g$$

Η σχέση αυτή μας δίνει ***τη μεταβολή της πίεσης με το ύψος από ορισμένο επίπεδο αναφοράς***, σε ρευστό που ηρεμεί. Καθώς το ύψος αυξάνεται (dy>0) η πίεση μειώνεται (dp<0). ***Η αιτία της μεταβολής της πίεσης είναι το βάρος*** (ανά μονάδα εμβαδού κάθετης τομής) ***των στρωμάτων του ρευστού*** που βρίσκονται ανάμεσα στα σημεία που μετριέται η διαφορά πίεσης.

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \Rightarrow dp = -\rho g dy \Rightarrow \int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g dy = -\rho g \int_{y_1}^{y_2} dy \Rightarrow p_2 - p_1 = -\rho g (y_2 - y_1)$$



Αν το υγρό έχει ***ελεύθερη επιφάνεια***, αυτή ***αποτελεί το επίπεδο από το οποίο μετράμε τις αποστάσεις***. Θέτοντας $p_2 = p_{atm}$ η πιο πάνω σχέση γράφεται:

$$p_{atm} - p = -\rho g (y_2 - y_1) \Rightarrow p_{atm} - p = -\rho g h \Rightarrow p = p_{atm} + \rho g h \quad \text{όπου:} \quad h = y_2 - y_1$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι ***η πίεση είναι ίδια σε όλα τα σημεία στο ίδιο βάθος***, ανεξάρτητα από το σχήμα του δοχείου

Παρατήρηση 1 : Τι ακριβώς μας δείχνει ένα όργανο που μετρά πίεση ; Το «πόσο μεγαλύτερη είναι η πίεση του ρευστού από την πίεση μηδέν ;» ή το «πόσο μεγαλύτερη (ή και μικρότερη) είναι η πίεση του ρευστού από την ατμοσφαιρική πίεση στην περιοχή που γίνεται η μέτρηση ;

Απάντηση: Άλλοτε μετράμε το "πόσο μεγαλύτερη είναι η πίεση του ρευστού από την πίεση μηδέν" την οποία αποδεχόμαστε για το κενό της κλασικής μηχανικής, ***«απόλυτη πίεση»,*** και άλλοτε πάλι μετράμε το «πόσο μεγαλύτερη (ή και μικρότερη) είναι η πίεση του ρευστού από την ατμοσφαιρική πίεση στην περιοχή που γίνεται η μέτρηση» , ***«διαφορική πίεση».***

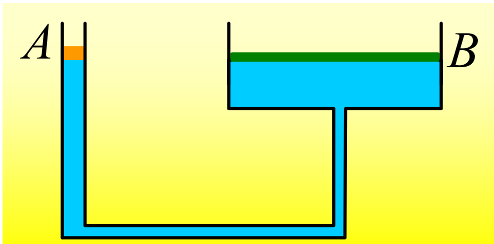
Όταν λέμε ότι **"η πίεση στο μπροστινό λάστιχο «είναι 30» εννοούμε «30 μονάδες πίεσης μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική»** , όπου οι 30 μονάδες είναι περίπου πίεση δύο ατμοσφαιρών, οπότε η **(απόλυτη)** πίεση του αέρα μέσα στο λάστιχο είναι περίπου τρεις ατμόσφαιρες

Αρχή του Pascal: κάθε μεταβολή της πίεσης ακίνητου ασυμπίεστου ρευστού μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλη την έκτασή του.

Αυτό σημαίνει ότι ένα σημείο στη θάλασσα της Σαντορίνης θα «αισθανθεί» μια μεταβολή της ατμοσφαιρικής πίεσης με τον ίδιο τρόπο είτε βρίσκεται σε βάθος 20cm είτε σε βάθος 300 m.

Το υδραυλικό πιεστήριο

Ι) Στη σχετική διάταξη τα δύο έμβολα Α και Β έχουν βάρη W_1 και W_2 και εμβαδά διατομής A_1 και A_2 αντίστοιχα. Τα δύο έμβολα ισορροπούν στο ίδιο ύψος.

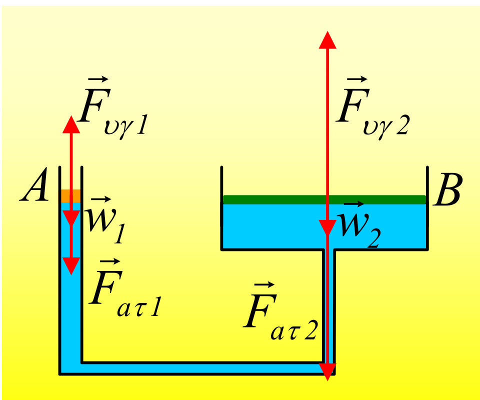


Στο επόμενο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε έμβολο, όπου $F_{υγ}$ οι δυνάμεις από το υγρό. Από την ισορροπία των εμβόλων έχουμε:

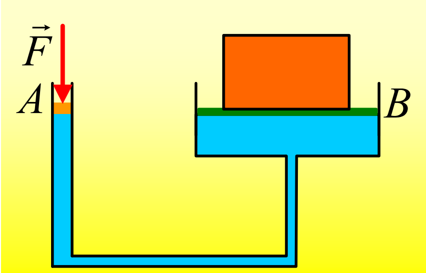
$$\Sigma F_1=0 \rightarrow F_{υγ1}=F_{ατ1}+w_1 \rightarrow p\cdot A_1=p_{ατ}\cdot A_1+w_1 \rightarrow p=p_{ατ}+\frac{w_1}{A_1}$$

$$\Sigma F_2=0 \rightarrow F_{υγ2}=F_{ατ2}+w_2 \rightarrow p\cdot A_2=p_{ατ}\cdot A_2+w_2 \rightarrow p=p_{ατ}+\frac{w_2}{A_2}$$

Όπου p η πίεση στις κάτω επιφάνειες των δύο εμβόλων, κοινή στα δύο έμβολα, αφού οι δυο επιφάνειες του υγρού βρίσκονται στο ίδιο ύψος. Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε: $\frac{w_1}{A_1}=\frac{w_2}{A_2}$



ΙΙ) Τοποθετούμε πάνω στο έμβολο Β, ένα σώμα Σ μάζας Μ. Πόση κατακόρυφη δύναμη F πρέπει να ασκήσουμε στο Α έμβολο, ώστε να μην μετακινηθούν τα έμβολα;



Μετά την τοποθέτηση του σώματος Σ πάνω στο έμβολο Β, ισχύει:

$p = p_{ατ} + \frac{F + w_1}{A_1}$ και $p = p_{ατ} + \frac{w_2 + w_Σ}{A_2}$, οπότε προκύπτει:

$$\frac{F + w_1}{A_1} = \frac{w_2 + w_Σ}{A_2} \rightarrow F = (w_2 + Mg)\cdot\frac{A_1}{A_2} - w_1 \rightarrow F = w_2 \cdot \frac{A_1}{A_2} + Mg\cdot\frac{A_1}{A_2} - w_1$$

Όμως $w_2 = w_1 \frac{A_2}{A_1}$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$$F = w_1 + Mg\cdot\frac{A_1}{A_2} - w_1 \rightarrow F = Mg\cdot\frac{A_1}{A_2}$$

Η σχέση αυτή εκφράζει την αρχή του Pascal αφού ασκώντας επιπλέον δύναμη F, προκαλούμε αύξηση πίεσης κατά $\frac{F}{A_1}$, ίση σε όλα τα σημεία του υγρού, συνεπώς και ίση με $\frac{Mg}{A_2}$, οπότε:

$$\frac{F}{A_1} = \frac{Mg}{A_2} \Rightarrow F = Mg\frac{A_1}{A_2}$$

ΙΙΙ) Αυξάνοντας το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F μετακινούμε το Α έμβολο κατά h, φέρνοντάς το να ισορροπεί σε μια νέα θέση.

α) Πόσο θα ανέβει το σώμα Σ;

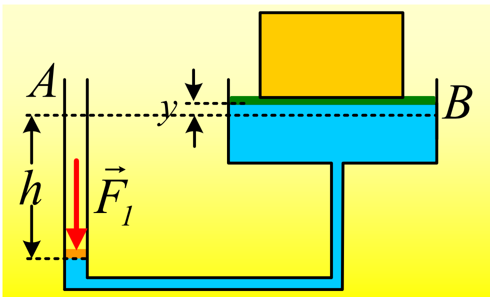
β) Να δείξετε ότι η τελική τιμή της δύναμης F που ασκούμε στο έμβολο Α έχει αυξηθεί κατά την ποσότητα $\rho g(h+y)A_1$

γ) Να υπολογίσετε την ενέργεια που προσφέρει η ατμόσφαιρα, στο σύστημα

δ) Να υπολογίσετε το έργο της ασκούμενης δύναμης F.

Όταν το έμβολο Α έχει κατέβει κατά h, τότε το έμβολο Β έχει ανέβει κατά y, αφού ***όσο μειώνεται ο όγκος του νερού στο αριστερό σκέλος, τόσο αυξάνεται στο δεξιό.***

α) Έστω V_1 η μείωση του όγκου στο αριστερό σκέλος και V_2 η αύξηση του όγκου στο δεξιό. Αφού το νερό θεωρείται πρακτικά ασυμπίεστο υγρό, ισχύει $V_1=V_2$.



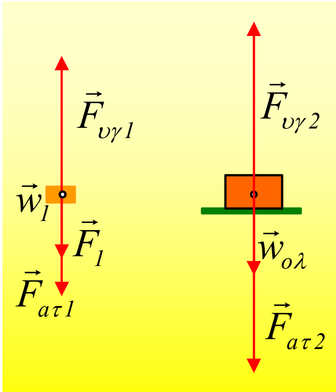
Άρα: $V_1 = V_2 \Rightarrow A_1 \cdot h = A_2 \cdot y \rightarrow y = h \cdot \frac{A_1}{A_2}$

β) Στο επόμενο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στο έμβολο Α και δίπλα στο «σύστημα» έμβολο Β-σώμα Σ. Από την ισορροπία τους έχουμε:

$\Sigma F_1=0 \rightarrow F_{\upsilon\gamma1}=F_1+F_{\alpha\tau1}+w_1 \rightarrow p_1 \cdot A_1=F_1+p_{\alpha\tau}\cdot A_1+w_1 \rightarrow p_1 = p_{at} + \frac{F_1+w_1}{A_1}$

$\Sigma F_2=0 \rightarrow F_{\upsilon\gamma2}=F_{\alpha\tau2}+w_{o\lambda} \rightarrow p_2\cdot A_2=p_{\alpha\tau}\cdot A_2+w_{o\lambda} \rightarrow p_2 = p_{at} + \frac{w_{o\lambda}}{A_2}$

Όπου p_1 η πίεση σε ένα σημείο στην κάτω πλευρά του εμβόλου Α και p_2 η αντίστοιχη σε σημείο στην κάτω πλευρά του εμβόλου Β.



Όμως από το θεμελιώδη νόμο της ισορροπίας των υγρών, ισχύει: $p_1 = p_2 + \rho g(h+y)$

Εξισώνοντας έχουμε:

$$\mathrm{p_{at}} + \frac{F_1 + w_1}{A_1} = p_2 + \rho g(h+y)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη:

$$\mathrm{p_2} + \rho g(h+y) - p_2 = \mathrm{p_{at}} + \frac{F_1 + w_1}{A_1} - \mathrm{p_{at}} - \frac{w_{o\lambda}}{A_2} \Rightarrow \frac{F_1 + w_1}{A_1} - \frac{W_{o\lambda}}{A_2} = \rho g(h+y) \Rightarrow$$

$$F_1 = \rho g(h+y)A_1 + (w_2 + Mg)\frac{A_1}{A_2} - w_1 \Rightarrow F_1 = \rho g(h+y)A_1 + w_2\frac{A_1}{A_2} + Mg\frac{A_1}{A_2} - w_1 \Rightarrow$$

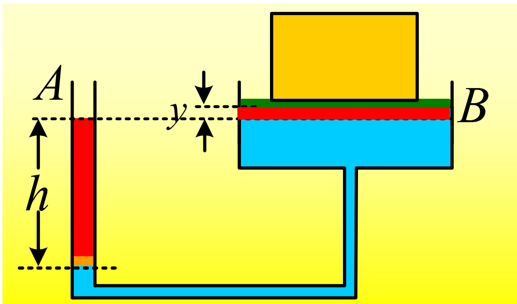
$$F_1 = \rho g(h+y)A_1 + Mg\frac{A_1}{A_2} \Rightarrow F_1 = F + \rho g(h+y)A_1$$

γ) Η ενέργεια που προσφέρει η ατμόσφαιρα στο σύστημα, είναι ίση με το άθροισμα των έργων των δυνάμεων $F_{\alpha\tau/1}$ και $F_{\alpha\tau/2}$:

$$\mathrm{W_{atm}} = F_{at1}\cdot \mathrm{h} - \mathrm{F_{at2}}\cdot y = p_{at}A_1\cdot h - pt_{at}A_2\cdot y = p_{at}\left(A_1\cdot h - A_2\cdot y\right) = 0$$ αφού $A_1\cdot h = A_2\cdot y$

δ) Το έργο της ***μεταβλητής*** ασκούμενης δύναμης F στο έμβολο Α θα υπολογιστεί ***μέσω της διατήρησης της ενέργειας του συστήματος*** υγρό- έμβολα-σώμα Σ

Θεωρούμε το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την αρχική θέση των εμβόλων ως επίπεδο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας. Ως προς το επίπεδο αυτό το σύστημα υγρό – έμβολα – σώμα Σ, έχει κάποια δυναμική ενέργεια $U_{αρχ}$.



Μετά την εξάσκηση της δύναμης και αφού το έμβολο Α κατέβει κατά h και το Β ανέβει κατά y, έχουμε ***αύξηση*** της δυναμικής ενέργειας ***του εμβόλου Β και του σώματος Σ*** κατά $(m_2+M)gy = w_2y + Mgy$, ***ελάττωση*** της δυναμικής ενέργειας ***του εμβόλου Α*** κατά $m_1gh = w_1h$ και ***αύξηση*** της δυναμικής ενέργειας της ***μάζας του νερού που μετακινήθηκε*** από το αριστερό στο δεξιό σκέλος, κατά: $mg(\frac{h}{2}+\frac{y}{2}) = \frac{1}{2}mg(h+y) = \frac{1}{2}\rho Vg(h+y) = \frac{1}{2}\rho A_1hg(h+y)$, αφού το κέντρο μάζας της ποσότητας του νερού που ***μετακινήθηκε*** από το αριστερό στο δεξιό σκέλος, ανέβηκε κατά $\frac{h}{2}+\frac{y}{2}$

Εκφράζοντας τη διατήρηση της ενέργειας του συστήματος μέσω μιας σχέσης έχουμε:

$$U_{τελ} = U_{αρχ} + (m_2+M)gy - m_1gh + mg(\tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{2}y) \Rightarrow$$

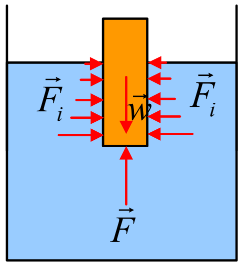
$$U_{τελ} - U_{αρχ} = w_2y + Mgy - w_1h + \frac{1}{2}\rho A_1hg(h+y) \Rightarrow \Delta U = w_2y + Mgy - w_1h + \frac{1}{2}\rho A_1hg(h+y)$$

Όμως: $w_2 = w_1\frac{A_2}{A_1}$ και $y = h\cdot\frac{A_1}{A_2}$, άρα: $w_2y = w_1\frac{A_2}{A_1}\cdot h\frac{A_1}{A_2} = w_1h$

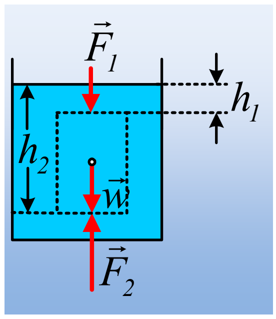
Τελικά: $\Delta U = Mgy + \frac{1}{2}\rho A_1 hg(h+y)$

Σύμφωνα όμως με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, αφού ***αυξήθηκε η ενέργεια του συστήματος κατά*** $\Delta U = Mgy + \frac{1}{2}\rho Ahg(h+y)$, ***το σύστημα πήρε από το περιβάλλον του ισοδύναμο ποσό ενέργειας***. Δείξαμε όμως στο προηγούμενο ερώτημα ότι ***η ατμόσφαιρα δεν πρόσφερε ενέργεια στο σύστημα***, άρα η ενέργεια αυτή ***προέρχεται από το αίτιο της εξωτερικής δύναμης F μέσω του έργου της δύναμης αυτής***: $W_F = Mgy + \frac{1}{2}\rho A_1 hg(h+y)$

Αρχή του Αρχιμήδη



Σε κάθε αντικείμενο που θα βρεθεί ***βυθισμένο***, ***ολόκληρο ή κατά ένα μέρος του***, μέσα σε υγρό, θα ασκείται από το υγρό **δύναμη κατακόρυφη με κατεύθυνση προς τα πάνω**, **ίση με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού**. Η δύναμη αυτή ονομάζεται άνωση και έχει μέτρο: $\mathbf{A=\rho g V_{\beta\upsilon\theta}}$ όπου **ρ** η πυκνότητα του υγρού και $\mathbf{V_{\beta\upsilon\theta}}$ ο όγκος του βυθισμένου τμήματος.



Ας δούμε την ***ισορροπία μιας στήλης υγρού***, όπως στο σχήμα, όπου τελικά ***δέχεται από το υπόλοιπο υγρό μια συνισταμένη δύναμη Fy κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω***, ίση με τη συνισταμένη των κατακόρυφων δυνάμεων που δέχεται στις δύο βάσεις, F1 και F2:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_2=F_1+w \rightarrow F_2-F_1=w \rightarrow F_y=mg=\rho Vg \rightarrow F_y=\rho g V$$

Αυτή η συνισταμένη δύναμη F_y ονομάζεται άνωση, συνεπώς: $A = \rho g V$

όπου ρ η πυκνότητα του υγρού, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και V ο όγκος της στήλης.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ποιο κλάσμα του όγκου ενός παγόβουνου βρίσκεται πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού; Η πυκνότητα του πάγου είναι $\rho_1 = 0{,}92\frac{g}{cm^3}$, ενώ του θαλασσινού νερού $\rho_2 = 1{,}03\frac{g}{cm^3}$

Απάντηση

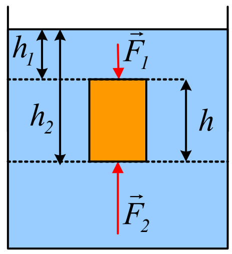
Το βάρος του παγόβουνου είναι ίσο με: $B_1 = m_1 V_1 = \rho_1 g V_1$, ενώ η άνωση που δέχεται είναι ίση με το βάρος του εκτοπιζόμενου θαλασσινού νερού $A = B_2 = \rho_2 g V_2$, όπου V_2 ο όγκος του βυθισμένου τμήματος του παγόβουνου.

Εφόσον το παγόβουνο ισορροπεί, ισχύει ότι:

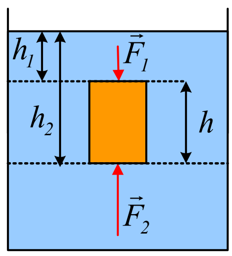
$$A = B_1 \Rightarrow \rho_2 g V_2 = \rho_1 g V_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{0,92}{1,03} = 0,89 \Rightarrow V_2 = 0,89 V_1$$

Δηλαδή ο όγκος του βυθισμένου τμήματος είναι το 0,89 του όγκου του παγόβουνου. Άρα πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού βρίσκεται μόλις το 0,11 του όγκου του παγόβουνου

Παρατήρηση 2 : Εφαρμόζοντας τη σχέση p=ρgh, η οποία προκύπτει από το Θεμελιώδη Νόμο Ισορροπίας των υγρών μη λαμβάνοντας υπόψη την ατμοσφαιρική πίεση, να δείξετε ότι η άνωση που δέχεται ένα σώμα βυθισμένο σε υγρό έχει μέτρο: $A = \rho g V$, όπου ρ η πυκνότητα του υγρού και V ο όγκος του σώματος.



Η συνισταμένη κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα πάνω, που ασκεί το υγρό στο βυθισμένο σώμα, λόγω διαφοράς πιέσεων στα διαφορετικά βάθη, έχει μέτρο: $\Sigma F = F_2 - F_1 = p_2 \cdot A - p_1 \cdot A = (\rho g h_2 - \rho g h_1) \cdot A = \rho g h A \rightarrow \Sigma F = \rho g V$, όπου V ο όγκος του σώματος, συνεπώς και ο όγκος του υγρού που εκτοπίζεται από το σώμα. Αλλά τότε ***αυτή η συνισταμένη είναι ίση με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού,*** αφού $w_{υγ}$=mg=ρgV , δηλαδή ***είναι*** η ***Άνωση:*** $A = \rho g V$



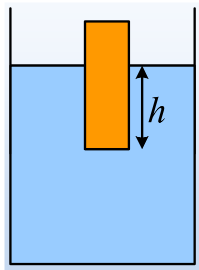
Στα παραπάνω δε λάβαμε υπόψη την ατμοσφαιρική πίεση, αφού θεωρήσαμε ότι p=ρgh. Να δείξετε ότι ***η άνωση θα έχει την ίδια τιμή***, $A = \rho g V$,ακόμα και αν ***λάβουμε υπόψη*** την ατμοσφαιρική πίεση.

Λαμβάνοντας υπόψη την ατμοσφαιρική πίεση, θα έχουμε: $p_2 = p_{atm} + \rho g h_2$ και $p_1 = p_{atm} + \rho g h_1$. Τότε όμως:

$$\Sigma F = F_2 - F_1 = p_2 \cdot A - p_1 \cdot A = (p_{\alpha\tau} + \rho g h_2) \cdot A - (p_{\alpha\tau} + \rho g h_1) \cdot A = \rho g (h_2 - h_1) \cdot A = \rho g h A = \rho g V$$

Αλλά τότε ***αυτή η συνισταμένη είναι ίση με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού,*** αφού $w_{υγ}=mg=\rho gV$, δηλαδή ***είναι*** η ***Άνωση:*** $A = \rho g V$

Ερώτηση



Ένα σώμα σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου βάρους W, ηρεμεί βυθισμένο σε νερό, όπως στο σχήμα. Αν το εμβαδόν της βάσης είναι A, η πυκνότητα του νερού είναι ρ, η επιτάχυνση της βαρύτητας g και η ατμοσφαιρική πίεση p_{atm}, τότε το βυθισμένο τμήμα ύψους h του σώματος, δίνεται από τη σχέση: α) $h = \dfrac{W}{\rho g A}$ β) $h = \dfrac{W + p_{atm}A}{\rho g A}$ γ) $h = \dfrac{W - p_{atm}A}{\rho g A}$

Απάντηση

Σύμφωνα με **την αρχή Pascal** η ατμοσφαιρική πίεση που ασκείται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του υγρού. Αυτό σημαίνει ότι η πίεση στον πυθμένα του παραλληλεπιπέδου έχει τιμή: $p = p_{atm} + \rho g h$, οπότε η ασκούμενη κατακόρυφη προς τα πάνω δύναμη από το υγρό έχει μέτρο: $F_2 = p_{atm}A + \rho g h A$. Η συνισταμένη βάρους και δύναμης από την ατμόσφαιρα, κατακόρυφη προς τα κάτω έχει μέτρο: $W + F_1 = W + p_{atm}A$

Εφόσον το σώμα ισορροπεί:

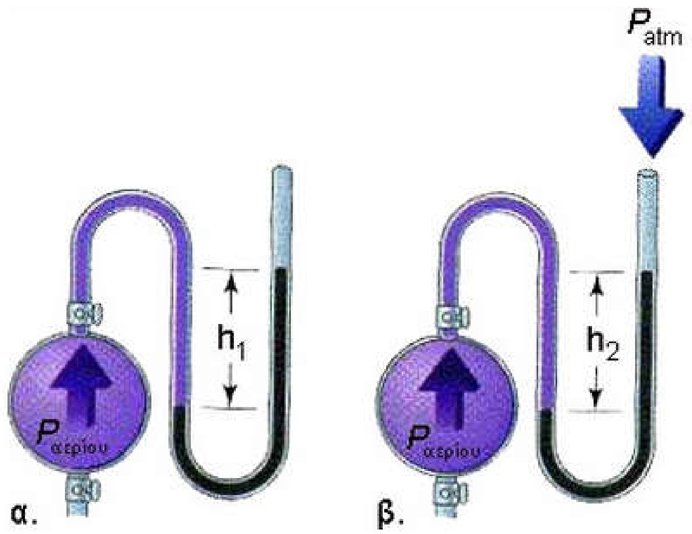
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow W + F_1 = F_2 \Rightarrow W + p_{atm}A = p_{atm}A + \rho g h A \Rightarrow W = \rho g h A \Rightarrow h = \frac{W}{\rho g A}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Δύο μανόμετρα υδράργυρου Hg τύπου U συνδέονται με ένα δοχείο που περιέχει αέρα άγνωστης πίεσης. Το μανόμετρο (α) είναι ***κλειστό στο πάνω άκρο του***, ενώ το (β) είναι ***ανοικτό***. Η υψομετρική διαφορά h σε ***κάθε*** μανόμετρο είναι $h=h_1=h_2=20$ cm . Για τις πιέσεις του αερίου στα δύο δοχεία ισχύει: α) $p_1 = p_2$ β) $p_1 = p_2 + p_{atm}$ γ) $p_2 = p_1 + p_{atm}$

Να υπολογιστεί επίσης η πίεση του αερίου στο εσωτερικό του κάθε δοχείου .

Δίνονται: $g=10\frac{m}{s^2}$, $\rho_{Hg}=13,6\times10^3\frac{Kg}{m^3}$ και $p_{atm}=10^5\frac{N}{m^2}$



Απάντηση

Στο μανόμετρο (α) ισχύει:

$$p_1=\rho_{Hg}gh\Rightarrow p_1=13,6\times10^3\times10\times0,2\frac{N}{m^2}\Rightarrow p_1=27,2\times10^3\frac{N}{m^2}=0,272\times10^5\frac{N}{m^2}$$

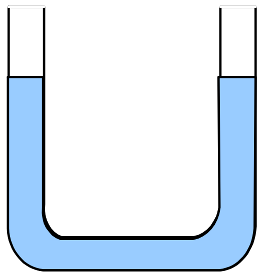
Στο μανόμετρο (β) ισχύει:

$$p_2=p_{atm}+\rho_{Hg}gh\Rightarrow p_2=10^5\frac{N}{m^2}+13,6\times10^3\times10\times0,2\frac{N}{m^2}\Rightarrow p_2=10^5\frac{N}{m^2}+0,272\times10^5\frac{N}{m^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_2=1,272\times10^5\frac{N}{m^2}$$

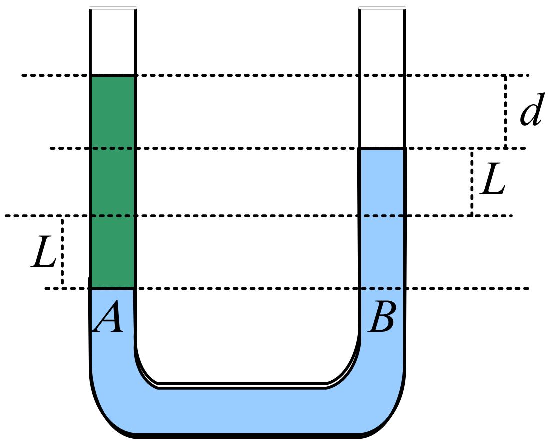
Προφανώς σωστό είναι το (γ) $p_2=p_1+p_{atm}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3



Θεωρούμε σωλήνα σχήματος U, ο οποίος περιέχει αρχικά υγρό πυκνότητας ρ_1. Η ελεύθερη στάθμη του υγρού βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο στους δύο σωλήνες.

Ι) Προσθέτουμε στο αριστερό σκέλος δεύτερο υγρό πυκνότητας ρ_2 , όπου $\rho_2 < \rho_1$. Η στάθμη του υγρού αυτού φθάνει σε ύψος d πάνω από τη στάθμη του υγρού πυκνότητας ρ_1 στο δεξί σκέλος του σωλήνα, η οποία έχει ανέβει κατά L=d σε σχέση με την αρχική στάθμη.



Να βρεθεί ο λόγος των πυκνοτήτων ρ_1 / ρ_2 των παραπάνω υγρών

ΙΙ) Θεωρούμε δύο σημεία Ζ και Η, στο οριζόντιο επίπεδο της αρχικής στάθμης του υγρού πυκνότητας ρ_1 . Το Ζ βρίσκεται στο υγρό πυκνότητας ρ_2 ενώ το Η στο υγρό πυκνότητας ρ_1 .

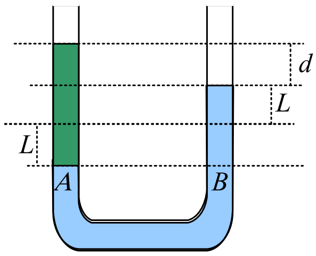
Για τις πιέσεις στα δύο αυτά σημεία ισχύει:

α) $p_z = p_H$ β) $p_z = p_H + \frac{1}{2}\rho_2 gL$ γ) $p_H = p_Z + \frac{1}{2}\rho_2 gL$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Εφόσον τα δύο σκέλη του σωλήνα έχουν την ίδια διατομή, όσο ανεβαίνει η στάθμη του υγρού πυκνότητας ρ_1 στο δεξί σκέλος, τόσο θα κατεβαίνει στο αριστερό. Άρα η στάθμη του υγρού αυτού στα δύο σκέλη του σωλήνα, θα διαφέρει κατά 2L.

I) Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β, στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, στα δύο σκέλη του σωλήνα. Σύμφωνα με την ***αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων***, σε δύο σημεία Α και Β που ***βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο εντός του ίδιου υγρού, οι πιέσεις είναι ίσες***, δηλαδή ισχύει $p_A = p_B$



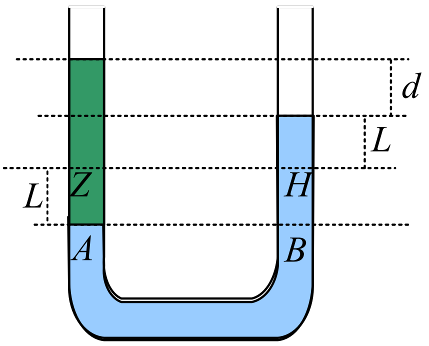
Όμως: $p_A = p_{atm} + \rho_2 g(2L + d)$ και $p_B = p_{atm} + \rho_1 g 2L$

Συνεπώς: $p_A = p_B \Rightarrow p_{atm} + \rho_2 g(2L + d) = p_{atm} + \rho_1 g 2L \Rightarrow \rho_2 (2L + d) = \rho_1 2L \Rightarrow \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{2L + d}{2L}$

Επειδή όμως d=L ισχύει: $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{2L + L}{2L} = \dfrac{3}{2}$

II) Ισχύει ότι: $p_Z = p_A - \rho_2 g L$ και $p_H = p_B - \rho_1 g L$

Όμως: $\rho_1 > \rho_2$ και $p_A = p_B$ οπότε $p_Z > p_H$



Ισχύει ότι: $p_Z = p_{atm} + \rho_2 g(L+d) \Rightarrow p_Z = p_{atm} + \rho_2 g 2L$

και $p_H = p_{atm} + \rho_1 gL \Rightarrow p_H = p_{atm} + \frac{3}{2}\rho_2 gL$

Αφαιρώντας κατά μέλη: $p_z - p_H = 2\rho_2 gL - \frac{3}{2}\rho_2 gL \Rightarrow p_z = p_H + \frac{1}{2}\rho_2 gL$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Θοδωρής Παπασγουρίδης