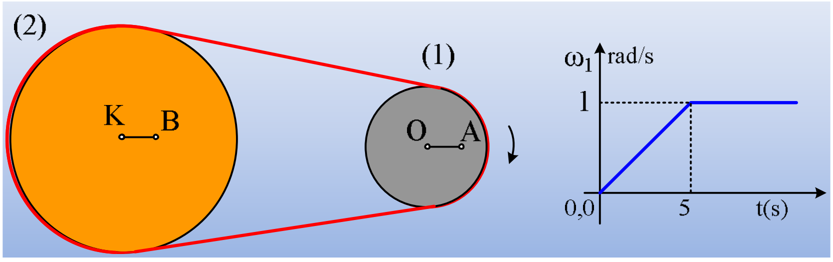
Περιστροφή δύο κυλίνδρων.



Οι δυο κύλινδροι του σχήματος, με ακτίνες R_1=0,2m και R_2=0,5m, μπορούν να στρέφονται γύρω από σταθερούς άξονες που περνάνε από τα κέντρα των βάσεών τους, συνδέονται με ιμάντα και ηρεμούν. Κάποια στιγμή ο κύλινδρος (1) τίθεται σε περιστροφή και στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η γωνιακή του ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο. Ο ιμάντας δεν γλιστρά στους κυλίνδρους με αποτέλεσμα να τίθεται σε περιστροφή και ο δεύτερος κύλινδρος (2).

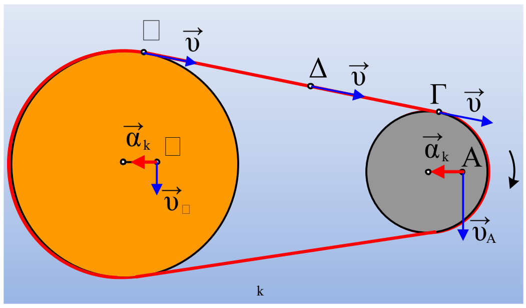
i) Να γίνουν τα διαγράμματα της γωνιακής επιτάχυνσης κάθε κυλίνδρου σε συνάρτηση με το χρόνο.

ii) Κάποια στιγμή t_1 >5s, δύο σημεία των κυλίνδρων Α και Β βρίσκονται στις θέσεις που φαίνονται στο σχήμα. Τα σημεία αυτά απέχουν r=10cm από τους άξονες περιστροφής Ο και Κ αντίστοιχα.

α) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση κάθε σημείου.

β) Μετά πόσο χρόνο τα παραπάνω σημεία θα βρίσκονται ταυτόχρονα ξανά στις ίδιες θέσεις για πρώτη φορά;

Απάντηση:



i) Τα σημεία Γ, Δ και Ε, σημεία του ιμάντα, έχουν κάθε στιγμή την ίδια ταχύτητα υ. Αλλά, από την στιγμή που ο ιμάντας δεν γλιστρά στους κυλίνδρους οι ταχύτητες των σημείων Γ και Ε είναι και γραμμικές ταχύτητες δύο σημείων στην περιφέρεια των κυλίνδρων, συνεπώς:

$$\upsilon_E=\upsilon_\Gamma=\upsilon_{1\gamma\rho}=\upsilon_{2\gamma\rho} \text{ ή}$$

$$\omega_1\cdot R_1=\omega_2\cdot R_2 \rightarrow \frac{d\omega_1}{dt}R_1=\frac{d\omega_2}{dt}R_2 \rightarrow \alpha_{1\gamma\omega\nu}\cdot R_1=\alpha_{2\gamma\omega\nu}\cdot R_2 \ (1)$$

Για τον πρώτο κύλινδρο με βάση το διάγραμμα η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή από 0-5s (σταθερή κλίση στο διάγραμμα ω-t, οπότε:

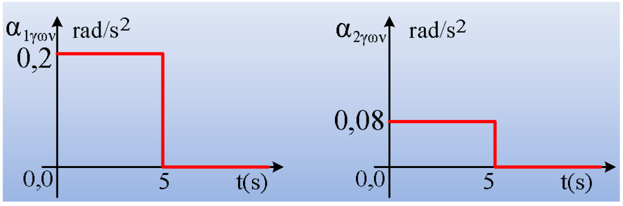
$$a_{1\gamma\omega\nu}=\frac{d\omega_1}{dt}=\frac{\Delta\omega_1}{\Delta t}=\frac{1-0}{5-0}rad/s^2=0,2rad/s^2$$

Ενώ είναι μηδενική όταν t >0.

Οπότε από την (1) βρίσκουμε: $a_{2\gamma\omega\nu}=a_{1\gamma\omega\nu}\frac{R_1}{R_2}=0,2\frac{0,2}{0,5}rad/s^2=0,08rad/s^2$

Ενώ είναι επίσης μηδενική όταν t >0.

Με βάση αυτά, τα ζητούμενα διάγραμμα είναι όπως στα παρακάτω σχήματα:



ii) Στο παραπάνω σχήμα έχουν σημειωθεί η ταχύτητα και η κεντρομόλος επιτάχυνση για τα σημεία Α και Β. Από τη στιγμή που η επιτάχυνση των κυλίνδρων έχει μηδενιστεί η μόνη επιτάχυνση που έχουν τα σημεία είναι η κεντρομόλος, οπότε:

$$a_{k1} = \omega_1^2 r = 1 \cdot 0{,}1 m/s^2 = 0{,}1\, m/s^2$$

Εξάλλου $\omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2 \rightarrow \omega_2 = \omega_1 \dfrac{R_1}{R_2} = 1\dfrac{0{,}2}{0{,}5} rad/s = 0{,}4 rad/s$, συνεπώς:

$$a_{k2} = \omega_2^2 r = 0{,}4 \cdot 0{,}1 m/s^2 = 0{,}04\, m/s^2$$

Το σημείο Α θ βρίσκεται στην παραπάνω θέση στις χρονικές στιγμές που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου, δηλαδή τις στιγμές $t=NT_1$. Όμοια το σημείο Β, τις στιγμές $t= N'T_2$. Συνεπώς η χρονική στιγμή που για πρώτη φορά θα βρεθούν ταυτόχρονα στις ίδιες θέσεις, θα είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) των δύο περιόδων.

Αλλά $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} = \dfrac{2\pi}{1} s = 2\pi\ s$ και $T_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_2} = \dfrac{2\pi}{0{,}4} s = 5\pi\ s$

συνεπώς τα δυο σημεία θα βρεθούν ταυτόχρονα στις ίδιες θέσεις σε χρόνο 10π s=31,4s, μετά τη στιγμή t_1.

dmargaris@sch.gr