Πώς βρήκε ο Αρχιμήδης το αν ήταν νοθευμένο, και πόσο, το στέμμα του Ιέρωνα; Η πρόταση του νεαρού Γαλιλαίου.

Παναγιώτης Κουμαράς.

Περίληψη.
Στην εργασία αρχικά παρουσιάζονται δυο, οι πιο γνωστές και διαδεδομένες στη βιβλιογραφία, εκδοχές για το τι μπορεί να έκανε ο Αρχιμήδης για να λύσει το γνωστό πρόβλημα με τη νόθευση ή όχι του χρυσού στέμματος: 1) οι ογκομετρήσεις του στέμματος και, ισοβαρών με αυτό, κομματιών χρυσού και αργύρου, που περιγράφει ο Βιτρούβιος και η παραλλαγή της με την μέτρηση της διαφοράς στάθμης του νερού σε δοχείο όταν βυθίζονται σε αυτό αρχικά κομμάτι καθαρού χρυσού και στη συνέχεια το ισοβαρές με αυτό στέμμα και 2) βύθιση ολόκληρου του ζυγού, ή μόνο του στέμματος και του χρυσού που είναι αναρτημένα στη φάλαγγά του, μέσα σε νερό. Παρουσιάζονται μειονεκτήματα αυτών των εκδοχών τα οποία καθιστούν μάλλον αδύνατον να ακολούθησε ο Αρχιμήδη μια από αυτές. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η εκδοχή που εισηγήθηκε το 1586, ο 22χρονος τότε, Γαλιλαίος και η οποία περιέργως δεν είναι ευρέως γνωστή στη βιβλιογραφία. Η ισάξια του Ανθρώπου αυτού μέθοδος θα μπορούσε εύκολα να εφαρμοστεί από χρυσοχόους καθώς δίνει με τη βοήθεια μόνο ζυγίσεων την αναλογία χρυσού και αργύρου στο στέμμα. Τέλος δείχνεται πώς η σχέση στην οποία κατέληξε ο Γαλιλαίος για την αναλογία χρυσού/αργύρου στο στέμμα, προκύπτει με τις σημερινές γνώσεις μαθητών Λυκείου

1. Το πρόβλημα.

Σύμφωνα με τον Βιτρούβιο(Vitruvius:de Architectura, Book IX, introduction 9-12· Σταμάτης 1970, σελ. 269· Κασσέτας) όταν ο Ιέρων Β΄ ανέλαβε την εξουσία στις Συρακούσες (το 270 π.Χ.) αποφάσισε να αφιερώσει σε κάποια θεότητα ένα χρυσό στέμμα. Το στέμμα αυτό είχε τη μορφή ενός στεφανιού, ανάλογου με αυτά που έχουν βρεθεί σε βρεθεί σε ελληνικούς τάφους της εποχής, π.χ. Εικόνα 1 (Rorres 1). Έδωσε λοιπόν το απαιτούμενο βάρος χρυσού στον τεχνίτη και ο τεχνίτης του επέστρεψε το στεφάνι, ίσου βάρους με το χρυσό που του είχε δώσει ο Ιέρων. Υπήρξαν όμως υποψίες ότι ο τεχνίτης είχε αντικαταστήσει ένα μέρος του χρυσού με άργυρο ίδιου βάρους, έτσι ώστε το στεφάνι να έχει τελικά βάρος όσο και το κομμάτι χρυσού που του έδωσε ο Ιέρων.

Εικόνα 1: Πιθανά αυτής της μορφής ήταν στέμμα του Ιέρωνα.

Ο Ιέρων ζήτησε από τον Αρχιμήδη να βρει αν ο τεχνίτης είχε νοθεύσει το στεφάνι, χωρίς όμως να το λειώσει, ήταν ένα πολύ όμορφο και δεν έπρεπε να καταστραφεί μόνο από μια υποψία. Ο Αρχιμήδης βασάνιζε το μυαλό του για να βρει τη λύση. Είναι γνωστή η ιστορία με την έμπνευση που του ήρθε όταν έκανε το μπάνιο του στα δημόσια λουτρά, και τον οδήγησε να βγει από αυτά γυμνός και να τρέχει στους δρόμους φωνάζοντας «εύρηκα».

2. **Πώς έλυσε ο Αρχιμήδης το πρόβλημα με το χρυσό στεφάνι του Ιέρωνα;**

Το αρχαιότερο, σχετικό με τη νόθευση του στέμματος, κείμενο που σώζεται είναι του Βιτρούβιου γραμμένο περίπου 200 χρόνια μετά τα γεγονότα. Υπάρχουν επίσης κείμενα, με εκδοχές για το τι μπορεί να έκανε ο Αρχιμήδης, από την εποχή του Μεσαίωνα, καθώς και Ιταλών σύγχρονων του Γαλιλαίου και από τον ίδιο τον Γαλιλαίο, σε νεαρή ηλικία. Οι εκδοχές για το τι μπορεί να έκανε ο Αρχιμήδης, και οι προβληματισμοί ή όχι για την αποδοχή τους, παρουσιάζονται στη συνέχεια ταξινομημένες σε τρεις ομάδες.

2.1.Λύση του προβλήματος με ογκομετρήσεις

Σύμφωνα με τον Βιτρούβιο Αρχιμήδης ζήτησε να του δώσουν ένα κομμάτι χρυσού και ένα κομμάτι άργυρου που το καθένα είχε βάρος ίσο με το βάρος του στεφανιού που παρέδωσε ο τεχνίτης. Στη συνέχεια:

1. Γέμισε, μέχρι τα χείλη, ένα κατάλληλο δοχείο με νερό. Βύθισε σε αυτό το κομμάτι του άργυρου, οπότε χύθηκε από το δοχείο όγκος νερού ίσος με την όγκο του κομματιού του άργυρου. Συγκέντρωσε το νερό που χύθηκε και μέτρησε τον όγκο του με τη βοήθεια μετρητή όγκου της εποχής.
2. Στη συνέχεια γέμισε το δοχείο, με το νερό που είχε χυθεί, και βύθισε σε αυτό το κομμάτι του χρυσού. Οπότε χύθηκε όγκος νερού ίσος με την όγκο του κομματιού του χρυσού. Συγκέντρωσε και μέτρησε, όπως και πριν, τον όγκο αυτού του νερού. Βρήκε ότι με το κομμάτι του χρυσού χύθηκε λιγότερο νερό από ότι στην περίπτωση του άργυρου. Η διαφορά των όγκων του νερού που εκτοπίστηκε στις δυο περιπτώσεις αντιστοιχεί στη διαφορά των όγκων των δυο ισοβαρών κομματιών χρυσού και άργυρου.
3. Μετά από αυτά ο Αρχιμήδης βύθισε το στεφάνι στο, γεμάτο πάλι μέχρι τα χείλη, δοχείο με νερό. Μέτρησε όπως και πριν, τον όγκο του νερού που χύθηκε. Βρήκε ότι ο όγκος του νερού που εκτόπισε το στεφάνι ήταν μεγαλύτερος από τον όγκο του νερού που εκτόπισε το κομμάτι του καθαρού χρυσού. Υπολόγισε κατόπι, από τη διαφορά μεταξύ του όγκου του νερού που εκτοπίστηκε από το στεφάνι και του όγκου του νερού που εκτοπίστηκε από το κομμάτι του καθαρού χρυσού, το βάρος του άργυρου που αναμίχτηκε με τον χρυσό(Vitruvius:de Architectura, Book IX, introduction 9-12, Σταμάτης 1970, σελ. 269-271):

Αρχικά ας δούμε μια ασυνέπεια που υπάρχει στην παραπάνω περιγραφή: Ενώ ο Αρχιμήδης εμφανίζεται να ζητάει ένα κομμάτι άργυρου ίσου βάρους με το στέμμα και να βρίσκει τον όγκο του, στο τέλος δεν τον χρησιμοποιεί. Εμφανίζεται να λύνει το πρόβλημα μόνο από τη διαφορά «μεταξύ του όγκου του νερού που εκτοπίστηκε από το στεφάνι και του όγκου του νερού που εκτοπίστηκε από το κομμάτι του καθαρού χρυσού». Σημειώνω ότι, στην περίπτωση που μπορούν οι ζητούμενοι όγκοι να μετρηθούν, η αναλογία της μάζας άργυρου προς τη συνολική μάζα του κράματος δίνεται από τη σχέση:a $= \frac{όγκος\ στεφανιού - όγκος\ χρυσού}{όγκος\ αργύρου - όγκος\ χρυσού}$. Στην περίπτωση που μετρήσουμε μόνο τη διαφορά όγκου (ΔV) νερού που εκτοπίζεται από τη βύθιση του στέμματος και του κομματιού του χρυσού η ποσότητα του άργυρου στο στέμμα υπολογίζεται, από τη σχέση m$= \frac{\Delta V d_{\alpha\rho} d_{\chi\rho}}{d_{\chi\rho} - d_{\alpha\rho}}$.

Ας δούμε την περιγραφή του Βιτρούβιου εξετάζοντας αν πραγματικά μπορούν να γίνουν αξιόπιστες μετρήσεις. Από τον Leyvaυποστηρίζεται ότι το πιο μεγάλο χρυσό δάφνινο στεφάνι που σώζεται από την εποχή του Αρχιμήδη έχει μάζα 714 γραμμάρια. Αν ληφθεί υπόψη ότι το στεφάνι αυτό έχει χάσει μερικά από τα φύλλα του, το πιθανότερο ήταν το στεφάνι που παρήγγειλε ο Ιέρων για τον ναό να ήταν $772gr$(Leyva 2008, σελίδες 28-32). Η πυκνότητα του χρυσού είναι $d_{\chi\rho} = 19{,}3\frac{gr}{cm^3}$και του άργυρου $d_{\alpha\rho} = 10{,}5\frac{gr}{cm^3}$.

- Το κομμάτι του χρυσού, ίδιου βάρος με το στεφάνι, θα έχει όγκο $V = \frac{m}{d_{\chi\rho}} = \frac{772}{19{,}3} = 40cm^3$. Άρα$40cm^3$θα είναι και ο όγκος του νερού που θα εκτοπιστεί.
- Το κομμάτι του άργυρου, ίδιου βάρος με το στεφάνι θα έχει όγκο $V = \frac{m}{d_{\alpha\rho}} = \frac{772}{10{,}5} = 73{,}52cm^3$. Άρα $73{,}52cm^3$θα είναι και ο όγκος του νερού που θα εκτοπιστεί.
- Έστω ότι ο χρυσοχόος είχε νοθεύσει το στεφάνι σε ποσοστό 25% δηλ. $772x0.25 = 193gr$ χρυσού έχουν αντικατασταθεί από $193gr$άργυρου. Το στεφάνι ζυγίζει πάλι $772\ gr$ αλλά έχει νοθευτεί κατά 25% και αποτελείται από $193gr$άργυρου και $579gr\ (772 - 193)$χρυσού. Το στεφάνι αυτό θα έχει όγκο $V_{ολικό} = V_{αργύρου} + V_{χρυσού} = \frac{193}{10{,}5} + \frac{579}{19{,}3} = 48{,}38cm^3$**.** Άρα $48{,}38cm^3$ θα είναι και ο όγκος του νερού που θα έχει εκτοπιστεί. Ο όγκος αυτός θα συγκριθεί με τον όγκο των $40cm^3$ που θα έπρεπε να καταλαμβάνει το στέμμα αν ήταν ανόθευτο. Στην περίπτωση δηλ που το στέμμα είναι νοθευμένο κατά 25%με άργυρο θα εκτοπίσει νερό κατά $\mathbf{8,38}cm^3$ μεγαλύτερο από τον όγκο που θα εκτόπιζε το ανόθευτο στέμμα.

Υπάρχει προβληματισμός αν τεχνικά μπορεί να διακριθεί η διαφορά των περίπου $\mathbf{8}cm^3$ (8,38) νερού που αναμένεται από τις βυθίσεις σε νερό του, ουσιαστικά, γνήσιου και του νοθευμένου, κατά 25%, στεφανιού. Πιθανόν η επιφανειακή τάση του νερού να κάνει το πρόβλημα τεχνικά δύσκολο δηλ. τι θα πει γεμίζει το δοχείο μέχρι τα χείλη; Γεμίζει μέχρι να αρχίσει να χύνεται; Λόγω της επιφανειακής τάσης το ποτήρι κρατάει νερό και πάνω από τα χείλη του, αυτό είναι πάντα το ίδιο; Στο κείμενο του Βιτρούβιου αναγράφεται ότι το νερό που εκτοπίζεται συλλέγεται και τοποθετείται πάλι στο δοχείο. Υπάρχουν όμως προβλήματα όπως: Συλλέγεται όλο το νερό που εκτοπίζεται κάθε φορά; Τι γίνεται με το νερό που προσκολλάται κάθε φορά στο αντικείμενο καθώς αυτό αναδύεται από το νερό; Τι πρόβλημα μπορεί να μπαίνει με τις φυσαλίδες από τον αέρα που παγιδεύεται στα δαντελωτά φύλλα του στέμματος; Επηρεάζει τις μετρήσεις ο αέρας που είναι διαλυμένος στο νερό; Μιλάμε μόλις για $\mathbf{8,38}cm^3$νερού αν το στεφάνι – στέμμα νοθεύτηκε κατά 25%, άρα οι παραπάνω παράγοντες μπορούν να αλλοιώσουν τη θεωρητικά αναμενόμενη μέτρηση των, περίπου,$\mathbf{8}cm^3$. Η πρακτικότητα της μεθόδου, και άρα η δυνατότητα απόδειξης της νοθείας του στέμματος, που παραπάνω παρουσιάστηκε έχει αμφισβητηθεί, λόγω της απαιτούμενης εξαιρετικής ακρίβειας με την οποία θα πρέπει να μετρηθεί το νερό που εκτοπίζεται, και των παραγόντων που δυσκολεύουν αυτή την προσπάθεια, μια και το αναμενόμενο αποτέλεσμα είναι ένας μικρός αριθμός.

Από την Sparavigna, ερευνήτρια στην αρχαία Φυσική, υποστηρίζεται ότι αν φανταστούμε ένα κλασικό αγγείο, η υπερχείλιση είναι δύσκολο να ελεγχθεί. Υποστηρίζει όμως ότι ο Αρχιμήδης είχε σίγουρα μια πιο κατάλληλη συσκευή το δοχείο που τότε χρησιμοποιείτο για το ρολόι νερού, ένα δοχείο με μια τρύπα κοντά στο χείλος του (Εικόνα 2).

Εικόνα2: Δοχείο με τρύπα κοντά στο χείλος(Sparavigna 2011).

Η Sparavigna έκανε αντίστοιχο πείραμα και έδειξε ότι είναι δυνατόν να υπάρξει μέτρηση των ζητούμενων όγκων (Sparavigna 2011).

Σημειώνεται ότι σε πολλές εκπαιδευτικές ταινίες, όπως και σε βιβλία, παρουσιάζεται ο Αρχιμήδης να μετράει, όχι το νερό που χύθηκε, αλλά την παρατηρούμενη διαφορά στην άνοδο της στάθμης του νερού στο δοχείο, όταν βύθιζε σε αυτό διαδοχικά πρώτα το κομμάτι του χρυσού και στη συνέχεια το στεφάνι. Ας δούμε αν η διαφορά αυτή μπορεί να παρατηρηθεί. Στεφάνι της εποχής που έχει διασωθεί έχει διάμετρο $18{,}5cm$. Ας δεχτούμε ότι το δοχείο, εκείνης της εποχής, μέσα στο οποίο βυθίστηκε το στεφάνι έχει διάμετρο $20cm$. Αυτό θα έχει διατομή $(\pi r^2)314cm^2$. Στους προηγούμενους υπολογισμούς βρήκαμε ότι η διαφορά του εκτοπίσματος του νερού μεταξύ του ανόθευτου στέμματος (κομμάτι χρυσού) και του κατά 25% νοθευμένου είναι $\mathbf{8,38}cm^3$. Αυτό σημαίνει διαφορά στάθμης $8{,}38/314 = \mathbf{0,027}\boldsymbol{cm}$ ή $\mathbf{0,27}\boldsymbol{mm}$. Δηλ. το νερό στο δοχείο, αν το στέμμα ήταν νοθευμένο κατά 25%, θα ανέβαινε κατά 0,27 χιλιοστά του μέτρου περισσότερο από το αν το στέμμα ήταν ανόθευτο. Προφανώς άνοδος της στάθμης κατά το ¼ περίπου του χιλιοστού του μέτρου είναι αδύνατο να παρατηρηθεί, και από αυτό κάποιοι συμπεράνουν ότι ο Βιτρούβιος έγραψε απλά ότι είχε μεταφερθεί μέχρι την εποχή του, και τελικά δεν περιγράφει σωστά τη μέθοδο που είχε επινοήσει ο Αρχιμήδης(Leyva 2008,σελ.27,Rorres1).

Θυμίζω ότι ο Βιτρούβιος δεν παρουσιάζει την απλή μέθοδο βύθισης, που μόλις περιγράφηκε, και η οποία είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη στη βιβλιογραφία και η κυριαρχούσα γνώση μεταξύ των εκπαιδευτικών. Ο Βιτρούβιος παρουσιάζει, όπως είδαμε, μια μέθοδο που βασίζεται στην υπερχείλιση του νερού από το δοχείο, τη μέτρηση του νερού που εκτοπίστηκε και εκ νέου πλήρωση του δοχείου με το νερό που χύθηκε.

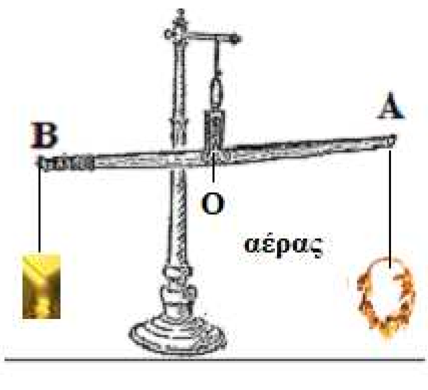
Πέρα όμως από την παραπάνω δυσκολία στη δυνατότητα μέτρησης της ανόδου της στάθμης, ή της ακριβούς μέτρησης του όγκου του νερού που εκτοπίστηκε, η περιγραφή του Βιτρούβιου έχει επικριθεί και για άλλους λόγους. Όπως π.χ. ότι, απαιτεί πολύ λιγότερη φαντασία από όση είναι βέβαιο ότι διέθετε ο Αρχιμήδης και αγνοεί εντελώς τόσο την Αρχή του Αρχιμήδη όσο και τον Νόμο των μοχλών, πατέρας των οποίων ήταν ο Αρχιμήδης (Ortoli, Witkowski1997, σελίδα 24).Η περιγραφή του Βιτρούβιου συνδέεται μόνο με την ιδέα «*κατά τη βύθιση ενός σώματος στο νερό εκτοπίζεται νερό ίσου όγκου με τον όγκο των σώματος*», δεν είναι δηλ. τίποτα παραπάνω από μια απλή ογκομέτρηση.

Σημειώνω και το δικό μου ερώτημα: Γιατί ο Αρχιμήδης να ζητήσει το κομμάτι του άργυρου και να μετρήσει τον όγκο του αφού δεν το χρησιμοποίησε; Μάλλον δεν θα το έκανε.

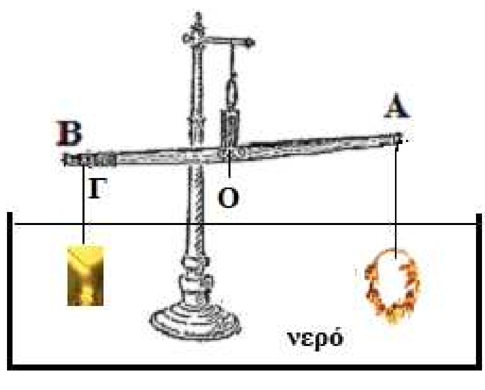
2.2.Λύση του προβλήματος με τοποθέτηση ολόκληρου του ζυγού ή μόνο των αναρτημένων σε αυτόν βαρών μέσα στο νερό.

Προτείνεται(Leyva2008, σελ. 29-30, Rorres1), για την ανίχνευση της απάτης, μια διαδικασία που απαιτεί περισσότερη φαντασία, από αυτήν που περιγράφει ο Βιτρούβιος, και επιπλέον χρησιμοποιεί τόσο την αρχή του Αρχιμήδη όσο και τον νόμο του μοχλού. Σύμφωνα με αυτήν ο Αρχιμήδης θα μπορούσε να έχει κρεμάσει στον έναν από τους δυο ίσους βραχίονες της φάλαγγας ενός ζυγού το στεφάνι - στέμμα και στον άλλον βραχίονα το κομμάτι, ίδιου βάρους με το στέμμα, καθαρού χρυσού. Ο ζυγός ισορροπεί στην ατμόσφαιρα, Εικόνα 3α.Στη συνέχεια τοποθέτησε είτε ολόκληρο το ζυγό μέσα στο ήρεμο νερό της μπανιέρας (η πρόταση του Leyva) είτε μόνο τα αναρτημένα σε αυτόν βάρη αφήνοντας τη φάλαγγα του πάνω από το νερό (η πρόταση του Rorres), και στις δυο περιπτώσεις ο ζυγός θα γύρει προς τη μεριά του καθαρού χρυσού, αν το στέμμα είναι νοθευμένο. Αυτό θα συμβεί γιατί το νοθευμένο στέμμα θα έχει μεγαλύτερο όγκο, λόγω της νόθευσης και άρα θα δέχεται από το νερό μεγαλύτερη άνωση από αυτήν που δέχεται ο καθαρός χρυσός ίδιου βάρους με το στέμμα. Με τη μέθοδο αυτή μπορούμε σίγουρα να διαπιστώσουμε αν το στέμμα είναι νοθευμένο ή όχι, δεδομένου ότι(Leyva 2008, σελ. 29, Rorres1) οι ζυγαριές της εποχής του Αρχιμήδη μπορούσαν εύκολα να εντοπίσουν μια ανισορροπία 8gr (όπως υπολογίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο ως αναμενόμενη διαφορά μεταξύ του γνησίου και του νοθευμένου στέμματος) στις μάζες. Σημειώνεται ότι η μέθοδος αυτή εξακολουθεί να λειτουργεί ακόμη και εάν οι μάζες του στεφανιού και του χρυσού δεν είναι ίσες. Απλά απαιτείται να προσαρμοστούν οι αποστάσεις τους από τον άξονα περιστροφής της φάλαγγας έως ότου η ζυγαριά στον αέρα ισορροπήσει.

Ας δούμε τώρα πώς θα μπορούσαμε να βρούμε την αναλογία του αργύρου προς τη συνολική μάζα του στέμματος με αυτή τη μέθοδο. Ο τρόπος εργασίας μας είναι ο ίδιος είτε ολόκληρος ο ζυγός, είτε μόνο τα αναρτημένα βάρη τοποθετηθούν μέσα στο νερό. Έστω ότι όταν τοποθετήθηκε ο ζυγός με τα αναρτημένα βάρη μέσα στο νερό(όλα τα παρακάτω ισχύουν και αν ολόκληρος ο ζυγός βυθιστεί μέσα στο νερό), έγειρε προς τη μεριά του καθαρού χρυσού. Μετακινούμε το σημείο ανάρτησης του χρυσού προς το σημείο Ο έως η φάλαγγα του ζυγού γίνει οριζόντια (Εικόνα 3β).



Εικόνα 3α:Ο ζυγός, στην ατμόσφαιρα, ισορροπεί με τα βάρη αναρτημένα από τα σημεία Α και Β



Εικόνα 3β: Ο ζυγός βυθισμένος μέσα στο νερό, ισορροπεί, με τα βάρη αναρτημένα από τα σημεία Α και Γ

Έστω ότι η φάλαγγα έγινε οριζόντια όταν το σημείο ανάρτησης για το κομμάτι του χρυσού βρέθηκε στο σημείο Γ (Εικόνα 3β). Ισχύει:

$\frac{Βάρος_{στέμματος\ στο\ νερό}}{Βάρος_{χρυσού\ στο\ νερό}} = \frac{(ΓΟ)}{(ΑΟ)} \quad \rightarrow \frac{Βάρος_{στέμματος\ στον\ αέρα} - Ανωση_{στέμματος\ από\ το\ νερό}}{Βάρος_{χρυσού\ στον\ αέρα} - Άνωση_{χρυσού\ στο\ νερό}} = \frac{(ΓΟ)}{(ΑΟ)}$

$\rightarrow \frac{m_{στ.}g - \frac{m_{στ,}gd_{ν}}{d_{στ.}}}{m_{χρ..}g - \frac{m_{χρ,}gd_{ν}}{d_{χρ.}}} = \frac{(ΓΟ)}{(ΑΟ)}$και επειδή $m_{στ.} = m_{χρ.}$ τελικά προκύπτει:$\frac{d_{χρ.}\,(d_{στ.} - d_{ν})}{d_{στ.}\,(d_{χρ.} - d_{ν})} = \frac{(ΓΟ)}{(ΑΟ)}$ (1)

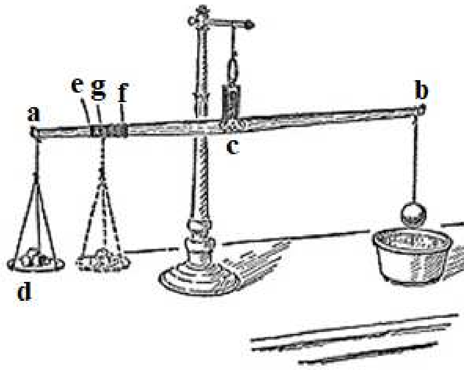
Αν a η αναλογία αργύρου προς τη συνολική μάζα του κράματος από το οποίο έγινε το στεφάνι, γιατην πυκνότητα του κράματος $d_{στ}$, από το οποίο έγινε το στεφάνι, έχω (βλέπε Παράρτημα) $d_{στ} = \frac{d_{αρ}d_{χρ}}{ad_{χρ}+(1-a)d_{αρ}}$ (2) Αντικαθιστώντας στην (1) την τιμή για την $d_{στ}$ από την (2) τελικά προκύπτει:$1 - \frac{ad_{ν}(d_{χρ.} - d_{αρ})}{d_{αρ}(d_{χρ.} - d_{ν})} = \frac{(ΟΓ)}{(ΟΑ)}$ (3) στην οποία είναι όλα γνωστά εκτός από το a, και λυόμενη ως προς αυτό, δίνει$a = \frac{(ΒΓ)}{(ΟΑ)} . \frac{d_{αρ}(d_{χρ.} - d_{ν})}{d_{ν}(d_{χρ.} - d_{αρ})}$ (ΒΓ=ΟΒ-ΟΓ), ΟΒ=ΟΑ

Πλεονεκτήματα της μεθόδου: Η μέθοδος απαντάει σίγουρα στο ερώτημα αν το στέμμα ήταν νοθευμένο. Επιπλέον με αυτή έχουμε την εισαγωγή τόσο της αρχής του Αρχιμήδη όσο και των μοχλών στη λύση του προβλήματος και πηγές σφάλματος που προκύπτουν με τη μέθοδο που περιγράφει οΒιτρούβιος (επιφανειακή τάση και προσκολλημένο στα σώματα νερό) αποφεύγονται.Με τον τρόπο αυτό αναζητήσαμε τη διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στο γνήσιο και στο νοθευμένο στέμμα όχι στο διαφορετικό όγκο νερού που αυτά εκτοπίζουν αλλά στη διαφορετική άνωση που δέχονται λόγω του διαφορετικού τους όγκου. Είναι δύσκολο να μετρήσουμε τον όγκο των 8 περίπου cm^3αλλά όχι το βάρος των 8grνερού που αντιστοιχούν (μέσω της άνωσης)σε αυτόν τον όγκο.

Ως μειονεκτήματα της μεθόδου έχουν καταγραφεί τεχνικά προβλήματα, όπως ότι έχει απαιτήσεις ηρεμίας του νερού, μη ύπαρξης ρευμάτων κτλ (Leyva 2008, σελ. 30) Βεβαίως και η ζύγιση που παραπάνω περιγράφεται έχει δυσκολίες ιδιαίτερα με όλον τον ζυγό βυθισμένο στο νερό. Προσωπικά ως μειονέκτημα θεωρώ και το ότι χρησιμοποιούμε μόνο το στέμμα και το ισοβαρές με αυτό κομμάτι του χρυσού. Μπαίνει πάλι το ερώτημα: Τότε γιατί ο Αρχιμήδης να ζητήσει και το κομμάτι του άργυρου και να κάνει και μετρήσεις με αυτό; Το κυριότερο όμως μειονέκτημα, νομίζω, πως ουσιαστικά είναι το ότι έχοντας το αποτέλεσμα της ζύγισης και τις πυκνότητες του χρυσού και του άργυρου για να βρούμε την αναλογία της μάζας του άργυρου προς τη συνολική μάζα του κράματος απαιτείται ουσιαστικά να λύσουμε ένα αλγεβρικό πρόβλημα. Αυτό μπορεί να είναι σήμερα συνηθισμένο, νομίζω όμως ότι ποιο ταιριαστό για την εποχή του Αρχιμήδη θα ήταν κάποια απευθείας πειραματική ένδειξη, πιθανόν και γεωμετρικής μορφής πρόβλημα.

2.3 Λύση του προβλήματος με τοποθέτηση του ενός δίσκου του ζυγού μέσα στο νερό

Το 1586 ο Γαλιλαίος, 22ετών, έγραψε μια σύντομη πραγματεία με τίτλο La Balancetta(Rorres 2), Στην πραγματεία του αυτή αρχικά σχολιάζει τις μεθόδους (ογκομετρήσεις) που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 2.1 και τις χαρακτηρίζει ως «*ένα ακατέργαστο πράγμα, μακριά από την επιστημονική ακρίβεια, [κάτι] που το καταλαβαίνουν ακόμη περισσότερο εκείνοι που έχουν διαβάσει και καταλάβει τις πολύ λεπτές εφευρέσεις αυτού του θεϊκού ανθρώπου*» Στη συνέχεια παρουσιάζει την άποψή του για το πώς ο Αρχιμήδης βρήκε όχι μόνο ότι το στέμμα ήταν νοθευμένο αλλά και την αναλογία χρυσού και αργύρου με την οποία αυτό είχε κατασκευαστεί, και αυτό μόνο με ζυγίσεις. Το πέτυχε με τη βοήθεια μιας ζυγαριάς μεγάλης ακρίβειας, βλέπε Εικόνα 4, την οποία ο ίδιος σχεδίασε/κατασκεύασε και δίνει μάλιστα στο τέλος της πραγματείας του και οδηγίες για την κατασκευή και τη χρήση της.



Εικόνα 4: Η μικρή ζυγαριά του Γαλιλαίου (Rorres 2)

Στην Εικόνα 4, abείναι η φάλαγγα της ζυγαριάς και c το σημείο της ανάρτησης. Είναι $bc = ac.$ Αν κρεμάσουμε διαδοχικά από το σημείο b το στέμμα και τα, ισοβαρή με αυτό, κομμάτια χρυσού και άργυρου αυτά ισορροπούν με το ίδιο αντίβαρο (d στην εικόνα 4)αναρτημένο στο a. Το αντίβαρο αυτό προφανώς ζυγίζει όσο και κάθε ένα από τα τρία παραπάνω σώματα στον αέρα.

Εάν τώρα βυθίζουμε το κομμάτι του χρυσού στο νερό (στη λεκάνη που φαίνεται κάτω από το b)και αφήσουμε το αντίβαρο στη θέση του στον αέρα, τότε το κομμάτι του χρυσού χάνει τόσο βάρος όσο η άνωση που δέχεται από το νερό (σε γλώσσα Αρχιμήδη ίση με το βάρος του νερού ίσο όγκου με το κομμάτι του χρυσού) και πρέπει να φέρουμε το εν λόγω αντίβαρο πιο κοντά στο σημείο c, **έστω στο σημείο e, για να ισορροπήσουμε το χρυσό**.

Αφαιρούμε στη συνέχεια το κομμάτι του χρυσού και στη θέση του βάζουμε το ισοβαρές με αυτό κομμάτι του άργυρου. Επειδή ο άργυρος έχει μικρότερη πυκνότητα από τον χρυσό, το κομμάτι του άργυρου καταλαμβάνει όγκο μεγαλύτερο από τον όγκο του χρυσού άρα δέχεται μεγαλύτερη άνωση και άρα για να ισορροπήσει η φάλαγγα πρέπει να φέρουμε το αντίβαρο ακόμη πιο κοντά προς το σημείο c, **έστω στο σημείο f, για να ισορροπήσουμε τον άργυρο.**

Αφαιρούμε το κομμάτι του αργύρου και στη θέση του βάζουμε το στέμμα. Αν το στέμμα είναι γνήσιο τότε για να ισορροπήσει θα πρέπει το αντίβαρο να πάει στη θέση e (η θέση για την ισορροπία του καθαρού χρυσού), αν το στέμμα ήταν αποκλειστικά από άργυρο τότε για να ισορροπήσει θα έπρεπε το αντίβαρο να πάει στη θέση f (η θέση για την ισορροπία του καθαρού άργυρου), **αν το στέμμα περιέχει και χρυσό και άργυρο θα πρέπει να φέρουμε το αντίβαρο σε κάποιο σημείο g μεταξύ των σημείων e και f.** Όσο πιο πολύ άργυρο περιέχει τόσο πιο κοντά προς το fθα είναι το σημείο g.

Ο Γαλιλαίος γράφει: «**Από την αναλογία στην οποία θα χωριστεί η απόσταση ef από το g θα πάρουμε με ακρίβεια την αναλογία των δύο μετάλλων που συνθέτουν το μείγμα».**(Rorres 2)

Σημειώνει ότι «*η απόσταση gf, που τελειώνει στο σημάδι για το ασήμι, θα δείχνει την ποσότητα του χρυσού και η απόσταση ge που τελειώνει στο σημάδι για το χρυσό θα υποδεικνύει την ποσότητα του αργύρου. έτσι ώστε, εάν το fg θα είναι διπλάσιο, το εν λόγω μίγμα θα είναι από δύο μέρη χρυσού και ένα από άργυρο*».

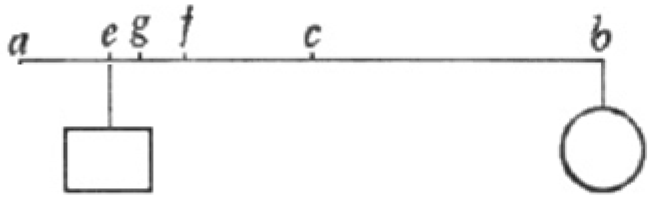
δηλ. $\boldsymbol{\frac{\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\ \chi\rho\upsilon\sigma o\acute{\upsilon}}{\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\ \alpha\rho\gamma\acute{\upsilon}\rho o\upsilon} = \frac{fg}{ge}}$(1)Είναι η σχέση του Γαλιλαίου που δίνει την αναλογία μαζών χρυσού-αργύρου στο στέμμα.

Στο τέλος της πραγματείας του περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο βρίσκει με τη ζυγαριά του την ακριβή τιμή του λόγου$\frac{fg}{ge}$. Ουσιαστικά για το τμήμα ef της φάλαγγας τυλίγει γύρω από τη ράβδο της φάλαγγας πολύ λεπτό σύρμα, κάτι σαν πηνίο δηλαδή, και μετράει των αριθμό των σπειρών που περιέχονται στο fg και στη συνέχεια στο ge. Έτσι για παράδειγμα, αν οι σπείρες στο fg είναι 40 και οι σπείρες στο ge είναι 21, τότε στο μείγμα θα υπάρχουν 40 μέρη του χρυσού και 21 αργύρου. Επειδή γνωρίζει ότι είναι δύσκολη η ακριβής καταμέτρηση των σπειρών συμβουλεύει: «*Για να τις μετρήσετε εύκολα, λοιπόν, πάρτε ένα πολύ κοφτερό στιλέτο και περάστε το αργά πάνω από τα εν λόγω σύρματα. Έτσι, εν μέρει μέσω της ακοής μας, και εν μέρει από το χέρι μας που αισθάνεται ένα εμπόδιο σε κάθε σπείρα του σύρματος, θα μετρήσουμε εύκολα τις εν λόγω σπείρες*».

2.4 Σημερινή έκφραση της σχέσης του Γαλιλαίου και απόδειξη της ισχύος της

Στη συνέχεια με σημερινή ύλη Λυκείου επιχειρώ να δείξω 1)πώς συνδέεται ο λόγος $\frac{fg}{ge}$(στη σχέση1) με τα βάρη των τριών σωμάτων (χρυσός, άργυρος, στέμμα) που εμπλέκονται, τι δηλ. θα έπρεπε να ζυγίσουμε με σημερινά όργανα ώστε να βρούμε τη ζητούμενη αναλογία και 2)πώς προκύπτειη σχέση του Γαλιλαίου με τη χρήση της παραπάνω ύλης.

Έτσι παίρνοντας γινόμενα ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής της φάλαγγας, σημείο c στο σχήμα της Εικόνας 5, και σύμφωνα με όσα γράφονται παραπάνω έχουμε:



Εικόνα 5: Η φάλαγγα του ζυγού και τα σημεία στα οποία το αντίβαρο ισορροπεί το στέμμα και τα κομμάτια του χρυσού και του αργύρου όταν αυτά είναι βυθισμένα στο νερό.

$$(Βάρος\ χρυσού\ στο\ νερό).(bc)\ =(αντίβαρο).ce \to ce=\frac{(Βάρος\ χρυσού\ στο\ νερό).(bc)}{αντίβαρο}\ (2)$$

$$(Βάρος\ \ άργυρου\ \ στο\ νερό).(bc)=(αντίβαρο).cf \to cf=\frac{(Βάρος\ \ άργυρου\ \ στο\ νερό).(bc)}{αντίβαρο}\ (3)$$

$$(Βάρος\ στέμματος\ στο\ νερό).(bc)=(αντίβαρο).cg \to cg=\frac{(Βάρος\ στέμματος\ στο\ νερό).(bc}{αντίβαρο}\ (4)$$

Είναι $fg=cg-cf$ και αντικαθιστώντας από τις (2) και (3) τελικά προκύπτει

$$fg=\frac{(Βάρος\ στέμματος\ στο\ νερό).(bc)-(Βάρος\ αργύρου\ στο\ νερό)\ .(bc)}{αντίβαρο} \qquad (5)$$

Ομοίως $ge=ce-cg$ και αντικαθιστώντας από τις (2) και (4) τελικά προκύπτει

$$ge=\frac{(\text{Βάρος χρυσού στο νερό}) .(\text{bc})-(\text{Βάρος στέμματος στο νερό}).(\text{bc})}{αντίβαρο}$$(6). Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει

$$\frac{fg}{ge}=\frac{\text{Βάρος στέμματος στο νερό}-\text{Βάρος αργύρου στο νερό}}{\text{Βάρος χρυσού στο νερό}-\text{Βάρος στέμματος στο νερό}}$$δηλ.

$$\frac{μάζα\ χρυσού\ στο\ στέμμα}{μάζα\ άργυρου\ στο\ στέμμα}=\frac{Βάρος\ στέμματος\ \ στο\ νερό-βάρος\ αργύρου\ στο\ νερό}{Βάρος\ χρυσού\ στο\ νερό-βάρος\ στέμματος\ \ στο\ νερό}(7)$$

Ουσιαστικά η σχέση αυτή, είναι η σχέση (1) του Γαλιλαίου σε σύγχρονη έκφραση, μας δείχνει και τι θα μπορούσαμε να κάνουμε σήμερα, ζυγίζοντας με σύγχρονα όργανα, για να λύσουμε το πρόβλημα που έβαλε ο Ιέρων στον Αρχιμήδη. Θα μπορούσε να είναι αντικείμενο projectσε Γυμνάσιο ή Λύκειο χρησιμοποιώντας βεβαίως αντί για χρυσό και άργυρο ράβδους χαλκού και αλουμινίου (Κουμαράς 2015, σελίδα 195).

Βιβλιογραφία

Κασσέτας, Α. Ο Αρχιμήδης στη μπανιέρα. η ΙΔΕΑ και η ΠΡΑΞΗ. Τι σκέφτηκε κι άρχισε να φωνάζει «εύρηκα» ; Τι ακριβώς έκανε με το στέμμα του Ιέρωνα ; http://users.sch.gr/kassetas/zzzzzzARCHIMEDES1.htm

Κουμαράς, Π., 2015. Μονοπάτια της σκέψης στον κόσμο της Φυσικής. Αθήνα, Gutenberg.

Σταμάτης, Ε., 1970. Αρχιμήδους Άπαντα. ΤόμοςΑ΄. ΜέροςΑ΄: Μαρτυρίαι Ελληνικαί –Λατινικαί. Αθήνα: Έκδοσις Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος.

Leyva, M. 2008. Από τον Αρχιμήδη έως τον Αϊνστάιν. Τα δέκα συναρπαστικότερα πειράματα Φυσικής. Αθήνα: Ενάλιος

OrtoliS., WitkowskiN.,1997. Η μπανιέρα του Αρχιμήδη. Αθήνα: Σαββάλας.

Rorres 1. The Golden Crown. Introduction. https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Crown/CrownIntro.html

Rorres 2.The Golden Crown. Galileo's balance https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Crown/bilancetta.html

Sparavigna A. 2011. The Vitruvius' Tale of Archimedes and the Golden Crown (RedazioneArchaeogate)http://www.archaeogate.org/classica/article.php?id=1459

Vitruvius. de Architectura. Book IXhttp://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Vitruvius/9*.html

Παράρτημα

Ας δούμε τώρα κατά πόσο η σχέση (7), δηλ. ουσιαστικά η σχέση στην οποία κατέληξε ο Γαλιλαίος για την αναλογία χρυσού/αργύρου στο στέμμα, προκύπτει με τις σημερινές γνώσεις μαθητών Λυκείου. Έστω λοιπόν ότι μας δίνουν σήμερα να λύσουμε το πρόβλημα που έβαλε ο Ιέρων στον Αρχιμήδη. Θα το αντιμετωπίσουμε αρχικά «θεωρητικά» και από τη λύση θα καταλάβουμε τι θα πρέπει να μετρήσουμε πειραματικά ώστε να λυθεί το πρόβλημα.

Ισχύει $μάζα_{χρυσού} = μάζα_{αργύρου} = μάζα_{στέμματος} = m$, όπου $μάζα_{στέμματος}$η μάζα του κράματος χρυσού - άργυρου που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή του στέμματος. Έστω $d_{χρ}$η πυκνότητα του χρυσού και$d_{αρ}$ η πυκνότητα του αργύρου. Ζητάμε να βρούμε τη νόθευση του κράματος σε άργυρο, δηλ. πόσα γραμμάρια άργυρου υπάρχουν σε ένα γραμμάριο κράματος (η αναλογία της μάζας του άργυρου προς τη συνολική μάζα του στεφανιού). Ο όγκος που καταλαμβάνει ο χρυσός είναι $V_{χρ} = \frac{m}{d_{χρ}}$και ο όγκος που καταλαμβάνει ο άργυρος είναι $V_{αρ} = \frac{m}{d_{αρ}}$. Το κράμα με το οποίο έγινε το στεφάνι, λόγω της νόθευσης α (αυτό που ψάχνουμε) σε άργυρο θα περιέχει $am\ gr\ αργύρου\ και\ (1-a)m\ gr\ χρυσού$ και ο όγκος που καταλαμβάνει το στεφάνι,$V_{στ}$, θα είναι: $V_{στ} = \frac{am}{d_{αρ}} + \frac{(1-a)m}{d_{χρ}} \rightarrow d_{στ} = \frac{m}{V_{στ}} = \frac{d_{αρ}d_{χρ}}{ad_{χρ}+(1-a)d_{αρ}}$, όπου $d_{στ}$ η πυκνότητα του κράματος με το οποίο έγινε το στεφάνι. Αυτή λύόμενη ως προς α δίνει:$α = \frac{d_{αρ}(d_{χρ}-d_{στ})}{d_{στ}(d_{χρ}-d_{αρ})}$, (αυτό σημαίνει πώς αν μπορούσαμε να μετρήσουμε τον όγκο του στεφανιού θα είχαμε το $d_{\sigma\tau}$και θα βρίσκαμε τη νόθευση)ή θέτοντας όπου d το αντίστοιχο $\frac{m}{V}$ και λόγω της (1)$\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha_{\chi\rho.} = \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha_{\alpha\rho.} = \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha_{\kappa\rho.} = m$προκύπτει $\alpha = \frac{V_{\sigma\tau} - V_{\chi\rho}}{V_{\alpha\rho} - V_{\chi\rho}}$ (αυτό σημαίνει ότι αν μπορούσαμε να μετρήσουμε με ακρίβεια τους όγκους θα βρίσκαμε τη νόθευση, βλέπε παράγραφο 2.1). Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή της τελευταίας σχέσης με gd_{ν} ώστε να προκύψουν ανώσεις και να περάσω σε βάρητα οποία μετρώνται ευκολότερα, και έχω:

$$a = \frac{gd_{\nu}(V_{\sigma\tau} - V_{\chi\rho})}{gd_{\nu}(V_{\alpha\rho} - V_{\chi\rho})} \rightarrow \alpha = \frac{gd_{\nu}V_{\sigma\tau} - gd_{\nu}V_{\chi\rho}}{gd_{\nu}V_{\alpha\rho} - gd_{\nu}V_{\chi\rho}} \rightarrow \frac{\acute{A}\nu\omega\sigma\eta_{\sigma\tau} - \acute{A}\nu\omega\sigma\eta_{\chi\rho}}{\acute{A}\nu\omega\sigma\eta_{\alpha\rho} - \acute{A}\nu\omega\sigma\eta_{\chi\rho}},$$

(οι ανώσεις στη συνέχεια αντικαθίστανται από το:
«βάρος του σώματος στον αέρα – το βάρος του αντίστοιχου σώματος στο νερό»).→

$$a = \frac{(\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \sigma\tau\varepsilon\varphi\alpha\nu.\ \sigma\tau o\nu\ \alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha - \beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \sigma\tau\varepsilon\varphi\alpha\nu.\ \sigma\tau o\ \nu\varepsilon\rho\acute{o}) - (\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \chi\rho\upsilon\sigma o\acute{\upsilon}\ \sigma\tau o\nu\ \alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha - \beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \chi\rho\upsilon\sigma o}{(\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \alpha\rho\gamma\acute{\upsilon}\rho o\upsilon\ \sigma\tau o\nu\ \alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha - \beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \alpha\rho\gamma\acute{\upsilon}\rho o\upsilon\ \sigma\tau o\ \nu\varepsilon\rho\acute{o}) - (\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \chi\rho\upsilon\sigma o\acute{\upsilon}\ \sigma\tau o\nu\ \alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha - \beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \chi\rho\upsilon\sigma o}$$

→

$$\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota: \beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \chi\rho\upsilon\sigma o\acute{\upsilon}\ \sigma\tau o\nu\ \alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha = \beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \alpha\rho\gamma\acute{\upsilon}\rho o\upsilon\ \sigma\tau o\nu\ \alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha = \beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \sigma\tau\varepsilon\varphi\alpha\nu\iota o\acute{\upsilon}\ \sigma\tau o\nu\ \alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha) \rightarrow$$

$a = \frac{\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \chi\rho\upsilon\sigma o\acute{\upsilon}\ \sigma\tau o\ \nu\varepsilon\rho\acute{o} - \beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \sigma\tau\varepsilon\varphi\alpha\nu\iota o\acute{\upsilon}\ \sigma\tau o\ \nu\varepsilon\rho\acute{o}}{\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \chi\rho\upsilon\sigma o\acute{\upsilon}\ \sigma\tau o\ \nu\varepsilon\rho\acute{o} - \beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \acute{\alpha}\rho\gamma\upsilon\rho o\upsilon\ \sigma\tau o\ \nu\varepsilon\rho\acute{o}}$(8), δηλ. από τη σχέση αυτή βρίσκουμε πόσα γραμμάρια άργυρου υπάρχουν σε ένα γραμμάριο του στέμματος.

Από εδώ μπορεί να βρεθεί το 1-α δηλ η περιεκτικότητα του κράματος σε χρυσό. Αυτή είναι $1 - a = \frac{\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \sigma\tau\varepsilon\varphi\alpha\nu\iota o\acute{\upsilon}\ \sigma\tau o\ \nu\varepsilon\rho\acute{o} - \beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \alpha\rho\gamma\acute{\upsilon}\rho o\upsilon\ \sigma\tau o\ \nu\varepsilon\rho\acute{o}}{\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \chi\rho\upsilon\sigma o\acute{\upsilon}\ \sigma\tau o\ \nu\varepsilon\rho\acute{o} - \beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma\ \acute{\alpha}\rho\gamma\upsilon\rho o\upsilon\ \sigma\tau o\ \nu\varepsilon\rho\acute{o}}$*(9)*δηλ. από τη σχέση αυτή βρίσκουμε πόσα γραμμάρια χρυσού υπάρχουν σε ένα γραμμάριο του στέμματος

και στη συνέχεια διαιρώντας κατά μέλη την σχέση 9 με την 8 προκύπτει $\frac{\text{χρυσός}}{\text{άργυρος}} = \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{\text{βάρος στεφανιού στο νερό} - \text{βάρος αργύρου στο νερό}}{\text{βάρος χρυσού στο νερό} - \text{βάρος στεφανιού στο νερό}}$(10)δηλ. από τη σχέση αυτή βρίσκουμε την αναλογία χρυσού/αργύρου στο στέμμα δηλ. την (7), τη σχέση του Γαλιλαίου, που θέλαμε να αποδείξουμε. Προφανώς για να λύσουμε το πρόβλημα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε από τις σχέσεις (8), (9) ή (10) θέλουμε και βεβαίως απαιτείται η μέτρηση του βάρουςκαθενός από τα τρία παραπάνω σώματα στο νερό.