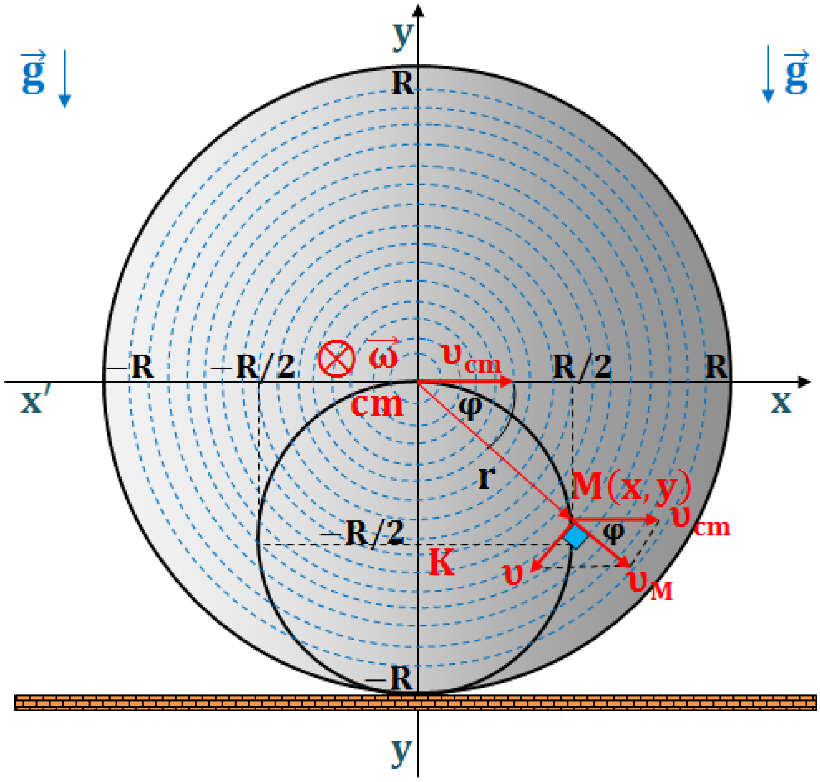
ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
ΚΥΛΙΣΗ ΤΡΟΧΟΥ

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ

Ένας λεπτός τροχός ακτίνας R κυλίεται -χωρίς ολίσθηση- στο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα κέντρου μάζας μέτρου υ_{cm} και γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω.

ΤΟ ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ του τροχού των οποίων οι ταχύτητες έχουν διεύθυνση ακτινική.



Η ΛΥΣΗ

Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_M$ του σημείου M είναι η συνισταμένη της ταχύτητας του κέντρου μάζας $\vec{\upsilon}_{cm}$ του τροχού και της (γραμμικής) ταχύτητας $\vec{\upsilon}$, λόγω της περιστροφικής κίνησης του στερεού.

$$\vec{\upsilon}_M = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon} \quad (1)$$

Από την (1), προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\upsilon_M = \sqrt{\upsilon_{cm}{}^2 + \upsilon^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi'} \ \ \mu\varepsilon\ \varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}, 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

και

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon\eta\mu\varphi'}{\upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi' + \upsilon_{cm}} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας στην (3), $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$ παίρνουμε διαδοχικά:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon\eta\mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{\upsilon\sigma\upsilon\nu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \upsilon_{cm}} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{\upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi}{-\upsilon\eta\mu\varphi + \upsilon_{cm}} \Leftrightarrow$$

$$-\upsilon\eta\mu^2\varphi + \upsilon_{cm}\eta\mu\varphi = \upsilon\sigma\upsilon\nu^2\varphi \Leftrightarrow \upsilon_{cm}\eta\mu\varphi = \upsilon(\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi) \Leftrightarrow$$

$$\upsilon = \upsilon_{cm}\eta\mu\varphi \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας στην (4) $\upsilon_{cm} = \omega R$ και $\upsilon = \omega r$, όπου r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του σημείου M προκύπτει:

$$r = R\eta\mu\varphi \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας στην (2) την (4) παίρνουμε:

$$\upsilon_M = \sqrt{{\upsilon_{cm}}^2 + \upsilon^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon\sigma\upsilon\nu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\upsilon_M = \sqrt{{\upsilon_{cm}}^2 + {\upsilon_{cm}}^2\eta\mu^2\varphi - 2{\upsilon_{cm}}^2\eta\mu^2\varphi} \Leftrightarrow$$

$$\upsilon_M = \sqrt{{\upsilon_{cm}}^2 - {\upsilon_{cm}}^2\eta\mu^2\varphi} \Leftrightarrow$$

$$\upsilon_M = \sqrt{{\upsilon_{cm}}^2(1 - \eta\mu^2\varphi)} \Leftrightarrow$$

$$\upsilon_M = \sqrt{{\upsilon_{cm}}^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi} \Leftrightarrow$$

$$\upsilon_M = \upsilon_{cm}\sigma\upsilon\nu\varphi \quad (6)$$

Είναι προφανές ότι τα ζητούμενα σημεία βρίσκοναι στο τρίτο και τέταρτο τεταρτημόριο. Επιπλέον από το σχήμα είναι:

$$\eta\mu\varphi = \frac{|y|}{r}, r^2 = x^2 + y^2 \quad (7)$$

Από την σχέση (5):

$$\eta\mu\varphi = \frac{r}{R} \Leftrightarrow \frac{|y|}{r} = \frac{r}{R} \Leftrightarrow r^2 = |y|R \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -yR, y \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + yR = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + \left(y + \frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 \quad (8)$$

Η (8) εκφράζει εξίσωση κύκλου με κέντρο και ακτίνα αντίστοιχα:

$$K\left(0, -\frac{R}{2}\right), \quad R_0 = \frac{R}{2} \qquad (9)$$

Σχόλιο: Για $\varphi = \frac{\pi}{2}$ είναι $\vec{\upsilon}_{cm} = -\vec{\upsilon} \Leftrightarrow \vec{\upsilon}_M = \vec{0}$, άρα μπορούμε να συμπεριλάβουμε στον κύκλο των ζητούμενων σημείων και το σημείο επαφής του τροχού με το οριζόντιο επίπεδο.