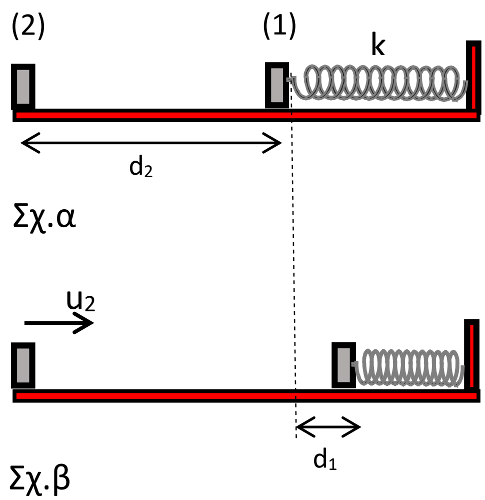
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ –ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΑΤ

Β. ΘΕΜΑΤΑΚΙΑ ΑΑΤ ΜΕ ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Παράδειγμα 1

Το ακίνητο σώμα (1) μάζας m_1 =1Kg συνδέεται με το αριστερό άκρο του ιδανικού, οριζόντιου, ελατηρίου σταθεράς k=100N/m και είναι πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Το άλλο άκρο του ελατηρίου συνδέεται σε σταθερό σημείο. Σε οριζόντια απόσταση d_2 από το σώμα (1) ,είναι ακίνητο σώμα (2) μάζας m_2 =3Kg . (Σχ. α) Μετατοπίζουμε το σώμα (1) οριζόντια προς τα δεξιά κατά d_1=0,2m και το κρατάμε. Τη χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε το σώμα (1) και δίνουμε οριζόντια ταχύτητα μέτρου u_2 =2m/s στο σώμα (2) προς τα δεξιά. (Σχ. β) Τη χρονική στιγμή t= $\frac{\pi}{20}$ s τα σώματα συγκρούονται πλαστικά. Θεωρούμε τα σώματα. χωρίς διαστάσεις.



Να βρεθούν

α) Η απόσταση d_2

β) Η ταχύτητα του σώματος (1) λίγο πριν την κρούση

γ) Η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

δ) Το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Απάντηση

α) Η περίοδος ταλάντωσης του σώματος (1) είναι T= 2π $\sqrt{\frac{m}{k}}$ = 2π $\sqrt{\frac{1}{100}}$..= $\frac{\pi}{5}$ s

Η χρονική στιγμή t =t_1 = $\frac{\pi}{20}$ s είναι t_1 = $\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{5}$ s = T/4 . Τα σώματα θα συναντηθούν στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος (1) που είναι η θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου και θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του.

Το σώμα (2) εκτελεί ΕΟΚ. Άρα $d_2 = u_2 t_1$ => $d_2 = 2 \cdot \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{10} = 0{,}314m$

β) Η ταχύτητα του σώματος (1) στη Θ.Ι. της ταλάντωσης είναι

$u_1 = u_{1(max)} = \omega d_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} d_1 = 10 \cdot 0{,}2 = 2m/s$

γ) Θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ κατά την πλαστική κρούση.

$p_{ολ.(πριν)} = p_{ολ.(μετά)}$ => $m_2u_2 - m_1u_1 = (m_2 + m_1)u_{κοινή}$ => $6-2= 4\cdot u_{κοινή}$ => $u_{κοινή} = 1m/s$

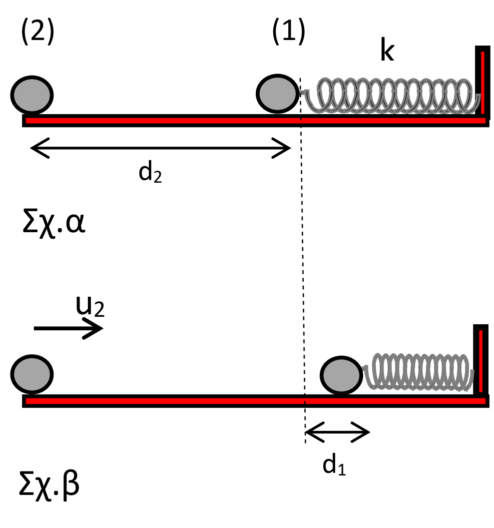
δ) Επειδή η θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου είναι θέση ισορροπίας και για την ταλάντωση του συσσωματώματος, η $u_{κοινή} = 1m/s$ είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσής του.

$u_{κοινή} = u_{κοινή\,(max)} = \omega' A_{(συσσωμ.)} = \sqrt{\frac{k}{4m}} A_{(συσσωμ.)}$ => $1= \sqrt{\frac{100}{4}} A_{(συσσωμ.)}$ => $1= 5A_{(συσσωμ.)}$ =>

$A_{(συσσωμ.)} = \frac{1}{5}$ => $A_{(συσσωμ.)} = 0{,}2m$

Εφαρμογή 1

Η ακίνητη σφαίρα (1) μάζας $m_1 = 1Kg$ συνδέεται με το αριστερό άκρο του αβαρούς, οριζόντιου, ελατηρίου σταθεράς k=100N/m και είναι πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Το άλλο άκρο του ελατηρίου συνδέεται σε σταθερό σημείο. Σε οριζόντια απόσταση d_2 από τη σφαίρα (1) είναι ακίνητη ίσου μεγέθους σφαίρα (2) μάζας $m_2 = 3Kg$. (Σχ. α) Μετατοπίζουμε τη σφαίρα (1) οριζόντια προς τα δεξιά κατά d_1=0,1m και την κρατάμε. Τη χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε τη σφαίρα (1) και δίνουμε οριζόντια ταχύτητα μέτρου u_2 =1m/s στη σφαίρα (2) προς τα δεξιά. (Σχ. β) Τη χρονική στιγμή $t= \frac{\pi}{20}$ s οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Θεωρούμε τις σφαίρες χωρίς διαστάσεις.



Να βρεθούν

α) Η απόσταση d_2 (d_2 = 0,157m)

β) Η ταχύτητα της σφαίρας (1) λίγο πριν την πρώτη κρούση (u_1 = 1m/s προς τα αριστερά)

γ) Οι ταχύτητες των σφαιρών αμέσως μετά την πρώτη κρούση (u'_1 = 2m/s προς τα δεξιά, u'_2 = 0)

δ) Το πλάτος ταλάντωσης της σφαίρας (1) μετά την πρώτη κρούση. (A= 0,2m)

ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ ΦΥΣΙΚΟΣ

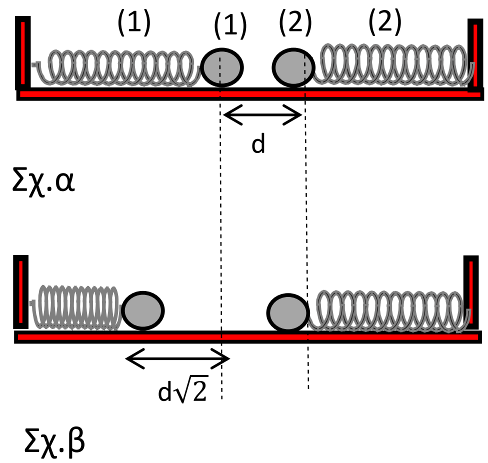
ε) Οι ταχύτητες των σφαιρών αμέσως μετά τη δεύτερη κρούση (u΄΄$_1$ = 1m/s προς τα δεξιά , u΄΄$_2$ = 1m/s προς τα αριστερά.)

ε) Το πλάτος ταλάντωσης της σφαίρας (1) μετά τη δεύτερη κρούση. (A= 0,1m)

Παράδειγμα 2

Οι ίδιες σφαίρες (1),(2) μάζας m η κάθε μία, συνδέονται με τα ελατήρια (1),(2) αντίστοιχα και είναι ακίνητες πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Τα άλλα άκρα των ελατηρίων συνδέονται σε σταθερά σημεία. Οι σταθερές των ελατηρίων (1),(2) είναι k_1 =k , k_2 =4k. Η οριζόντια απόσταση μεταξύ των σφαιρών είναι d (Σχ. α). Μετατοπίζουμε οριζόντια τη σφαίρα (1) προς τα αριστερά κατά d$\sqrt{2}$ και τη χρονική στιγμή t=0 την αφήνουμε (Σχ. β). Όταν συναντώνται οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Θεωρούμε τις σφαίρες χωρίς διαστάσεις,

Ποιες από τις σχέσεις είναι σωστές και γιατί.



Α. Η χρονική στιγμή t=t$_1$ λίγο πριν την πρώτη κρούση μεταξύ των σφαιρών είναι

α) $t_1= \frac{1}{4}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ β) $t_1= \frac{3}{4}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Απάντηση

1^{ος} τρόπος

Ο χρόνος κίνησης του σώματος (1) από t=0 μέχρι το Φ.Μ. του ελατηρίου (1), που είναι και η Θ.Ι. της ταλάντωσής του είναι $T_1/4 = \frac{1}{4}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (1)

Στη συνέχεια ο χρόνος από τη Θ.Ι. μέχρι την απομάκρυνση d προκύπτει από την εξίσωση της απομάκρυνσης.

Θεωρούμε την εξίσωση της απομάκρυνσης με την πιο απλή μορφή : Για t΄=0 x_1=0 και $u_1 > 0$ (με θετική φορά προς τα δεξιά) $x_1 = d\sqrt{2}\eta\mu\omega_1 t΄$. Όταν $x_1 = d$, $d = d\sqrt{2}\eta\mu\omega_1 t΄$ => $\eta\mu\omega_1 t΄ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

και η πιο μικρή γωνία είναι $\omega_1 t΄ = \frac{\pi}{4}$ => $\sqrt{\frac{k}{m}}\,t΄ = \frac{\pi}{4}$ => $t΄= \frac{1}{4}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Άρα $t_1 = T_1/4 + t' = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{1}{4}\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{3}{4}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (το β)

2ος τρόπος

Θεωρούμε την εξίσωση της απομάκρυνσης με αρχική φάση $x_1 = d\sqrt{2}\eta\mu(\omega_1 t + \varphi)$. Με θετική φορά προς τα αριστερά, για t=0 , $x_1 = d\sqrt{2}$. Άρα $d\sqrt{2} = d\sqrt{2}\eta\mu\,\varphi$ => $\eta\mu\,\varphi = 1$ => $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Η εξίσωση γίνεται $x_1 = d\sqrt{2}\eta\mu(\omega_1 t + \frac{\pi}{2})$. Για $x_1 = -d$ και $u<0$, $-d = d\sqrt{2}\eta\mu(\omega_1 t_1 + \frac{\pi}{2})$ =>

$\eta\mu(\omega_1 t_1 + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και με $\sigma\upsilon\nu(\omega_1 t_1 + \frac{\pi}{2}) <0$ (λόγω $u<0$) η πιο μικρή γωνία είναι

$\omega_1 t_1 + \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{4}$ => $\omega_1 t_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ => $\omega_1 t_1 = \frac{3\pi}{4}$ => $\sqrt{\frac{k}{m}}\,t_1 = \frac{3\pi}{4}$ => $t_1 = \frac{3}{4}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Β. Τα πλάτη ταλάντωσης των σφαιρών μετά την πρώτη κρούση είναι

α) $A_1 = d$, $A_2 = d/2$ β) $A_1 = d$, $A_2 = d$

Απάντηση

Η ταχύτητα της σφαίρας (1) λίγο πριν την κρούση βρίσκεται από την $ΑΔΕ_{ταλ.1}$:

$\frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}k(d\sqrt{2})^2$ => $mu_1^2 = kd^2$ => $u_1^2 = \frac{k}{m}d^2$ => $u_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,d$

Επειδή οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες ανταλλάσσουν ταχύτητες.

Για τη σφαίρα (1) $u_1'=0$. Άρα $A_1 = d$

Για τη σφαίρα (2) $u_2' = \sqrt{\frac{k}{m}}\,d$. Εφαρμόζουμε την $ΑΔΕ_{ταλ.2}$: $\frac{1}{2}mu_2'^2 = \frac{1}{2}4k\,A_2^2$ =>

$u_2'^2 = 4\frac{k}{m}A_2^2$ => $\frac{k}{m}d^2 = 4\frac{k}{m}A_2^2$ => $d^2 = 4A_2^2$ => $A_2 = d/2$ (το α)

Γ. Α. Η χρονική στιγμή $t=t_2$ λίγο πριν τη δεύτερη κρούση μεταξύ των σφαιρών είναι

α) $t_1 = \frac{9}{4}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ β) $t_1 = \frac{11}{4}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Απάντηση.

Η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος (1) είναι $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ και η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος (2) είναι $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}} = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ => $T_2 = T_1/2$. Άρα $T_1 = 2T_2$

Επομένως οι σφαίρες θα συναντηθούν στη θέση που έγινε η πρώτη κρούση ,αφού από την πρώτη κρούση η (1) κάνει μια πλήρη ταλάντωση και η (2) κάνει μισή ταλάντωση. Δηλαδή μετά από χρόνο $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ από την πρώτη κρούση.

Οπότε $t_2 = t_1 + T_1 = \frac{3}{4}\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{11}{4}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (το β)

Δ. Τα πλάτη ταλάντωσης των σφαιρών μετά τη δεύτερη κρούση είναι

α) $A'_1 = d\sqrt{2}$, $A'_2 = 0$ α) $A'_1 = d\sqrt{2}$, , $A'_2 = d$

Απάντηση

Λίγο πριν τη δεύτερη κρούση η σφαίρα (1) είναι στην ακραία θέση άρα $u_1=0$ και η σφαίρα (2) είναι στη Θ.Ι. της με ταχύτητα μέτρου $u_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,d$ και φορά προς τα αριστερά .

Οι σφαίρες ανταλλάσσουν πάλι ταχύτητες.

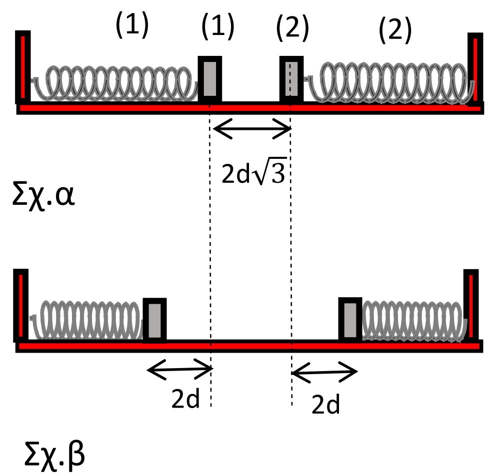
Μετά την κρούση η σφαίρα (2) ακινητοποιείται άρα $A'_2 = 0$ και η σφαίρα (1) αποκτάει ταχύτητα μέτρου $u_1= \sqrt{\frac{k}{m}}\,d$ προς τα αριστερά.

Εφαρμόζουμε την την ΑΔΕ$_{ταλ.1}$: $\frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}k\,A_1'^2$ => $m\frac{k}{m}d^2 + kd^2 = k\,A_1'^2$ =>

$A_1'^2 = 2d^2$ => $A'_1 = d\sqrt{2}$, (τα α)

Εφαρμογή 2

Τα σώματα (1),(2) με μάζες $m_1=m$ κα $m_2=3m$ συνδέονται με τα ελατήρια (1),(2) αντίστοιχα και είναι ακίνητες πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Τα άλλα άκρα των ελατηρίων συνδέονται σε σταθερά σημεία. Οι σταθερές των ελατηρίων (1),(2) είναι $k_1 =k$, $k_2 =3k$. Η οριζόντια απόσταση μεταξύ των σωμάτων είναι $2d\sqrt{3}$(Σχ. α). Μετατοπίζουμε οριζόντια το σώμα (1) προς τα αριστερά κατά 2d και το σώμα (2) προς τα δεξιά κατά 2d και τη χρονική στιγμή t=0 τα αφήνουμε (Σχ. β). Όταν συναντώνται οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά. Θεωρούμε τα σώματα χωρίς διαστάσεις.



Ποιες από τις σχέσεις – προτάσεις είναι σωστές και γιατί.

Α. Τα σώματα θα συναντηθούν

α.) Στο μέσο της απόστασης $2d\sqrt{3}$ β) Σε άλλη θέση εκτός από το μέσο της απόστασης $2d\sqrt{3}$

Β. Η χρονική στιγμή $t=t_1$ λίγο πριν την κρούση μεταξύ των σωμάτων είναι α) $t_1= \frac{3}{6}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ β .) $t_1= \frac{5}{6}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Γ. Η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι

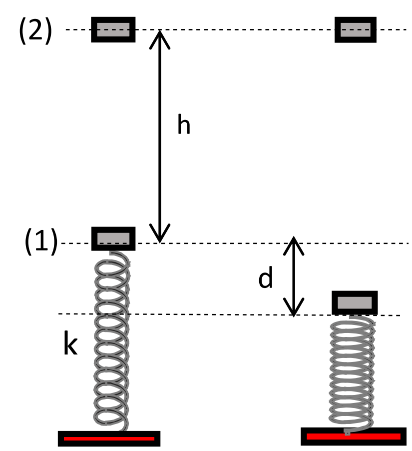
α) $V_{συσσωμ.} = \sqrt{\frac{k}{m}}\, d$ β .) $V_{συσσωμ.} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,\frac{d}{2}$

Δ. Το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι

α .) A = d β) A = d/2

Παράδειγμα 3

Το σώμα (1) συνδέεται με το πάνω άκρο του κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=100 N/m και είναι ακίνητο. Το κάτω άκρο του ελατηρίου συνδέεται με το δάπεδο. Σε ύψος h από το σώμα (1) κρατάμε σώμα (2) (Σχ. α) Κατεβάζουμε κατακόρυφα το σώμα (1) κατά d=0,2m και το κρατάμε. (Σχ. β) Αφήνουμε τα σώματα τις κατάλληλες χρονικές στιγμές ώστε να συναντηθούν στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του σώματος (1) , όταν το σώμα (1) διέρχεται από τη θέση αυτή για πρώτη φορά από τη στιγμή που το αφήσαμε. Τα σώματα συγκρούονται πλαστικά και η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι μηδέν. Οι μάζες των σωμάτων είναι $m_1=m_2=1Kg$.



Σχ.α Σχ.β

Να βρεθούν

α) Οι ταχύτητες των σωμάτων λίγο πριν την κρούση

β) Οι χρόνοι κίνησης των σωμάτων από τη στιγμή που τα αφήσαμε μέχρι τη στιγμή της κρούσης.

γ) Το ύψος h

δ) Το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Απάντηση

α)

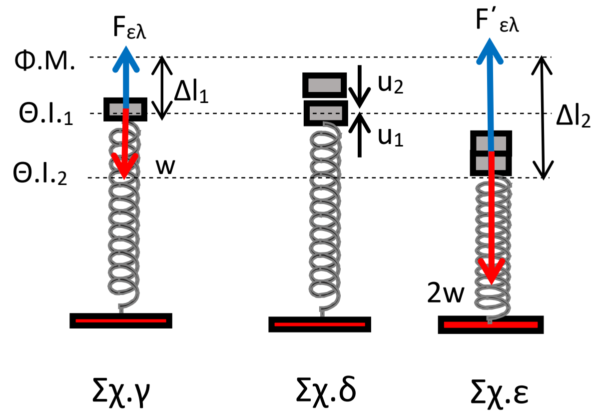
Η ταχύτητα του σώματος (1) στη Θ.Ι. του είναι

$u_1 = u_{1(max)} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m_1}}\ d = 10 \cdot 0{,}2 = 2m/s$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ κατά την πλαστική κρούση.

$p_{ολ.(πριν)} = p_{ολ.(μετά)} \Rightarrow m_1u_1 - m_2u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = 2m/s$

(Σχ. δ)



β) Το σώμα (2) κάνει ελεύθερη πτώση.

$u_2 = g\ t_2 \Rightarrow 2 = 10\ t_2 \Rightarrow t_2 = 0{,}2s$

Το σώμα (1) κάνει ΑΑΤ. Ο χρόνος για την κίνηση του σώματος ,από την ακραία του θέση μέχρι τη Θ.Ι. είναι Τ/4 . $T = = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{5}$ s . Άρα $t_2 = T/4 = \frac{\pi}{20}$ s

γ) Εφαρμόζουμε τη σχέση της κατακόρυφης μετατόπισης στην ελεύθερη πτώση.

$h = \frac{1}{2}\ g\ t_2^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}\ 10\ (0{,}2)^2 = 0{,}2m$

δ)

Στη Θ.Ι.$_1$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι μηδέν. Άρα είναι ακραία θέση της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος , είναι πιο κάτω από τη Θ.Ι.$_1$,λόγω της αύξησης του βάρους των σωμάτων που συνδέονται με το πάνω άκρο του ελατηρίου (Σχ. ε)

Βρίσκουμε τα μήκη Δl_1, Δl_2 και τα αφαιρούμε.

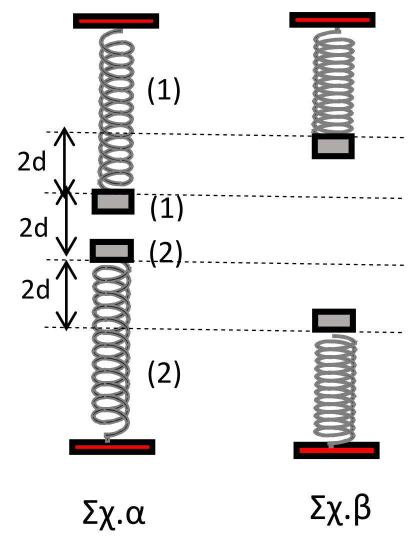
Θ.Ι.$_1$ (Σχ. γ) : $\Sigma F=0 \Rightarrow w - k\Delta l_1 = 0 \Rightarrow 10 - 100\Delta l_1 = 0 \Rightarrow \Delta l_1 = 0{,}1m$

Θ.Ι.$_2$ (Σχ.ε) : $\Sigma F=0 \Rightarrow 2w - k\Delta l_2 = 0 \Rightarrow 20 - 100\Delta l_2 = 0 \Rightarrow \Delta l_2 = 0{,}2m$

Άρα το πλάτος είναι $A = \Delta l_2 - \Delta l_1 = 0{,}1m$

Εφαρμογή 3

Τα σώματα (1), (2) με μάζες 3m , m αντίστοιχα συνδέονται με τα άκρα των κατακόρυφων ελατηρίων (1),(2) με σταθερές 3k , k αντίστοιχα .Τα άλλα άκρα των ελατηρίων συνδέονται σε σταθερά σημεία .Τα σώματα απέχουν μεταξύ τους μήκος 2d (Σχ. α). Ανεβάζουμε το σώμα (1) κατά 2d και κατεβάζουμε το σώμα (2) κατά 2d και τα κρατάμε (Σχ. β). Τη χρονική στιγμή t=0 τα αφήνουμε. Όταν τα σώματα συναντώνται συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά .



Ποιες σχέσεις- προτάσεις είναι σωστές και γιατί.

Α. Τα σώματα θα συναντηθούν τη χρονική στιγμή $t=t_1$

α .) $t_1= \frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ β) $t_1= \frac{5}{6}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Β. Τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων λίγο πριν τη συνάντησή τους

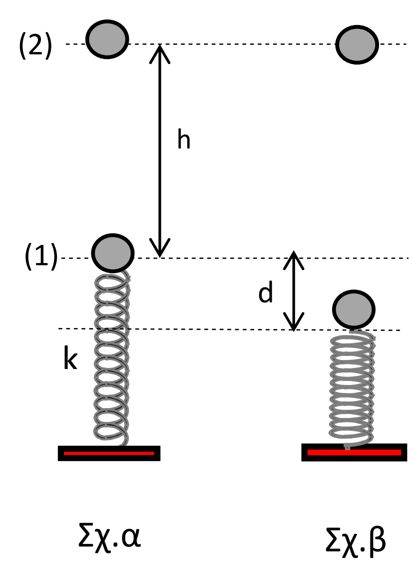
α.) είναι ίσα β) δεν είναι ίσα

Γ. Το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι

α) d β .) d/2

Παράδειγμα 4

Η σφαίρα (1) συνδέεται με το πάνω άκρο του κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=100 N/m και είναι ακίνητη. Το κάτω άκρο του ελατηρίου συνδέεται με το δάπεδο. Σε ύψος h από τη σφαίρα (1) κρατάμε σφαίρα (2) (Σχ. α) Κατεβάζουμε κατακόρυφα τη σφαίρα (1) κατά d=0,2m και την κρατάμε. (Σχ. β) Αφήνουμε τις σφαίρες τις κατάλληλες χρονικές στιγμές ώστε να συναντηθούν στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης της σφαίρας (1) , όταν η σφαίρα (1) διέρχεται από τη θέση αυτή για πρώτη φορά από τη στιγμή που την αφήσαμε Οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Οι μάζες των σωμάτων είναι m_1= 1 Kg , m_2=0,5Kg και το ύψος h=0,8m.



Να βρεθούν

α) Οι ταχύτητες των σφαιρών λίγο πριν την κρούση

β) Οι χρόνοι κίνησης των σφαιρών από τη στιγμή που τις αφήσαμε μέχρι τη στιγμή της κρούσης.

γ) Οι ταχύτητες των σφαιρών αμέσως μετά την κρούση

δ) Το πλάτος ταλάντωσης της σφαίρας (1) μετά την κρούση.

ε) Το ύψος στο οποίο θα φθάσει η σφαίρα (2) μετά την κρούση.

Απάντηση

α)

Η ταχύτητα του σώματος (1) στη Θ.Ι. του είναι $u_1 = u_{1(max)} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m_1}}\, d = 10 \cdot 0{,}2 = 2m/s$

Το σώμα (2) κάνει ελεύθερη πτώση. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ στο πεδίο βαρύτητας από το ύψος h μέχρι τη θέση συνάντησης. $m_2\, g\, h = \frac{1}{2} m_2\, u_2^2$ => $u_2 = \sqrt{2gh}$ => $u_2 = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}8}$ => $u_2 = 4m/s$

β)

Το σώμα (1) κάνει ΑΑΤ. Ο χρόνος για την κίνηση του σώματος ,από την ακραία του θέση μέχρι τη Θ.Ι. είναι Τ/4 . $T = = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{5}$ s . Άρα $t_2 = T/4 = \frac{\pi}{20}$ s

Από την εξίσωση της ταχύτητας στην ελεύθερη πτώση.

$u_2 = g\, t_2$ => $4 = 10\, t_2$ => $t_2 = 0{,}4s$

γ)

Από τις εξισώσεις την ταχυτήτων της κεντρικής ελαστικής κρούσης . Θεωρούμε θετική φορά προς τα πάνω.

$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2$ => $u_1' = \frac{1-0{,}5}{1{,}5} \cdot 2 + \frac{2 \cdot 0{,}5}{1{,}5}(-4)$ => $u_1' = \frac{2}{3} - \frac{8}{3} = -2m/s.$

$u_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$ => $u_2' = \frac{0{,}5-1}{1{,}5}(-4) + \frac{2 \cdot 1}{1{,}5} \cdot 2$ => $u_1' = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4m/s.$

δ)

Η ταχύτητα της σφαίρας (1) αμέσως μετά την κρούση είναι αντίθετη της ταχύτητάς της λίγο πριν την κρούση. Αφού η Θ.Ι. της ταλάντωσής της μετά την κρούση και της ταλάντωσής της πριν την κρούση είναι ίδια , το μέτρο της ταχύτητάς της είναι ίδιο (u_{max}) και από τη σχέση $u_{max} = \omega A$ και το πλάτος είναι ίδιο . Δηλαδή $A_{\text{μετά την κρούση}} = A_{\text{πριν την κρούση}} = 0{,}2m$

ε)

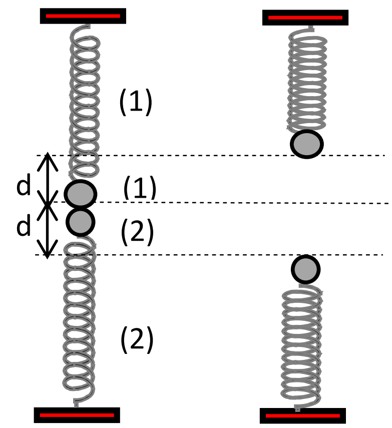
Η σφαίρα (2) εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ στο πεδίο βαρύτητας από τη θέση της κρούσης ,μέχρι το ύψος h΄ στο οποίο θα φθάσει η σφαίρα (2)

$\frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = m_2 g h'$ => $h' = u_2'^2 / 2g$ => $h' = 16 / 20$ => $h' = 0,8m$

Δηλαδή ίδιο με το αρχικό h=h΄= 0,8m

Εφαρμογή 4

Οι σφαίρες (1) ,(2) συνδέονται με τα άκρα των κατακόρυφων ελατηρίων (1),(2) αντίστοιχα , είναι ακίνητες, είναι σε επαφή μεταξύ τους και δεν ασκούνται δυνάμεις επαφής μεταξύ τους. (Σχ. α) Ανεβάζουμε τη σφαίρα (1) κατά d και κατεβάζουμε τη σφαίρα (2) κατά d και τις κρατάμε (Σχ. β). Τη χρονική στιγμή t=0 τις αφήνουμε. Όταν συναντώνται οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Οι μάζες των (1), (2) είναι m_1= 3m, m_2=m και οι σταθερές των ελατηρίων (1),(2) είναι k_1 =3k , k_2 =k.



Σχ.α Σχ.β

Ποιες σχέσεις- προτάσεις είναι σωστές και γιατί.

Α. Οι σφαίρες θα συναντηθούν για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή $t=t_1$

α .) $t_1= \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ β) $t_1= \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

Β. Τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων λίγο πριν τη συνάντησή τους

α.) είναι ίσα β) δεν είναι ίσα

Γ Αμέσως μετά την πρώτη κρούση

α .) Η ταχύτητα της σφαίρας (1) είναι μηδέν και η ταχύτητα της σφαίρας (2) έχει μέτρο $u_2' = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\, d$

β) Οι ταχύτητες των σφαιρών έχουν μέτρο $u' = \sqrt{\frac{k}{m}}\, d$

Δ. Οι σφαίρες θα συναντηθούν για δεύτερη φορά τη χρονική στιγμή $t=t_2$

α .) $t_2= \frac{3}{2} \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ β) $t_2= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

Ε. Τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων αμέσως μετά τη δεύτερη κρούση

α .) είναι ίσα β) δεν είναι ίσα

Ζ. Τα πλάτη ταλάντωσης των σφαιρών (1) , (2) μετά τη δεύτερη κρούση είναι

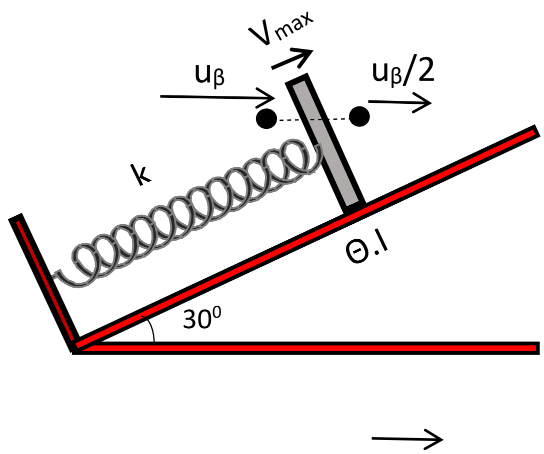
α) d , d   β) d/2 , d/2

Η. Δ. Οι σφαίρες θα συναντηθούν για τρίτη φορά τη χρονική στιγμή $t=t_3$

α.) $t_3=\frac{5}{2}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ β) $t_3= 3\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Παράδειγμα 5

Το σώμα μάζας Μ =1Kg συνδέεται με το ένα άκρο του ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m και εκτελεί ΑΑΤ με πλάτος Α= 0,1m ,στο λείο πλάγιο επίπεδο κλίσης 30^0. Το άλλο άκρο του ελατηρίου συνδέεται σε σταθερό σημείο. Τη στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του προς τα πάνω το διαπερνάει οριζόντια βλήμα, μάζας $m_\beta = \frac{1}{3}\cdot 10^{-2}$ Kg. Το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος λίγο πριν διαπεράσει το σώμα είναι u_β και το μέτρο της ταχύτητάς του αμέσως μετά τη στιγμή που το διαπερνάει είναι $u_\beta/2$. Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος στο πλάγιο επίπεδο αφού το διαπεράσει το βλήμα είναι Α΄= 0,2m.



Να βρεθούν

α) Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας του σώματος πριν διαπεράσει το βλήμα το σώμα και το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας του σώματος αφού διαπεράσει το βλήμα το σώμα.

β) Το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος u_β

γ) Η θερμότητα που εκλύεται στο χρονικό διάστημα που διαπερνάει το βλήμα το σώμα.

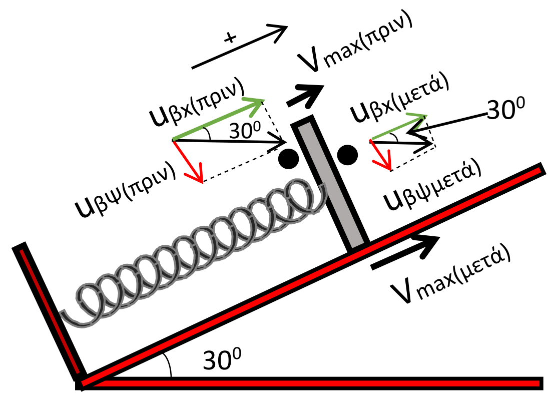
Απάντηση

α) Από τη σχέση $u_{max} = \omega A$ => $u_{max(πριν)} = \sqrt{\frac{k}{M}}A = 10 \cdot 0,1 = 1$m/s

Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας του Μ αφού το διαπεράσει το βλήμα είναι $u_{max(μετά)} = \sqrt{\frac{k}{M}}A΄$ =>

$u_{max(μετά)} = 10 \cdot 0,2 = 2$ m/s

β)



Εφαρμόζουμε στο σύστημα βλήμα - σώμα την ΑΔΟ στη διεύθυνση του πλάγιου επιπέδου, από τη στιγμή λίγο πριν διαπεράσει το βήμα το σώμα μέχρι τη στιγμή αφού διαπεράσει το βλήμα το σώμα.

Αναλύουμε την ταχύτητα του βλήματος πριν και μετά, στη διεύθυνση του πλάγιου επιπέδου x και στην κάθετη διεύθυνση ψ. Η θετική φορά είναι προς τα πάνω.

$p_{ολ.x(πριν)} = p_{ολ.x(μετά)} \Rightarrow m_β u_{βx(πριν)} + MV_{max(πριν)} = m_β u_{βx(μετά)} + MV_{max(μετά)} \Rightarrow$

$m_β |u_β| συν30^0 + MV_{max(πριν)} = m_β \frac{|u_β|}{2} συν30^0 + MV_{max(μετά)} \Rightarrow m_β |u_β| \frac{\sqrt{3}}{2} + MV_{max(πριν)} =$

$m_β \frac{|u_β|}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + MV_{max(μετά)} \Rightarrow m_β |u_β| \frac{\sqrt{3}}{4} = M\,(V_{max(μετά)} - V_{max(πριν)}) \Rightarrow$

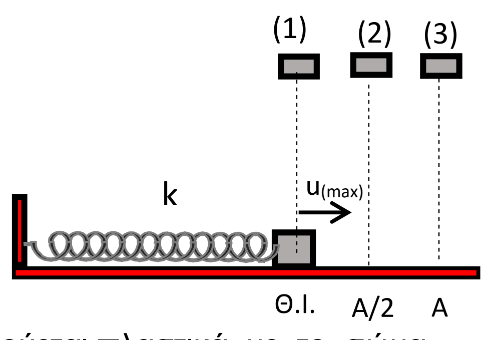
$\frac{1}{3} \cdot 10^{-2} |u_β| \frac{\sqrt{3}}{4} = 1\,(2-1) \Rightarrow |u_β| \sqrt{3} = 1200 \Rightarrow |u_β| = \frac{1200}{\sqrt{3}} \Rightarrow |u_β| = 400\sqrt{3}$ m/s

γ) $Q = K_{ολ.\,(αρχική)} - K_{ολ.\,(τελική)} = \frac{1}{2} m_β u_β^2 + \frac{1}{2} M\, V_{max.(πριν)}{}^2 - \frac{1}{2} m_β (u_β/2)^2 - \frac{1}{2} M\, V_{max.(μετά)}{}^2 \Rightarrow$

$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-2} (400\sqrt{3})^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-2} (200\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = 598{,}5J$

Εφαρμογή 5-α

Το σώμα μάζας m συνδέεται με το δεξιό άκρο του οριζόντιου, ελατηρίου σταθεράς k και εκτελεί ΑΑΤ πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο,με πλάτος Α. Το άλλο άκρο του ελατηρίου συνδέεται σε σταθερό σημείο. Κρατάμε τα σώματα (1),(2),(3) ακίνητα στις κατακόρυφες που διέρχονται από τη Θ.Ι. , τη θέση Α/2 και τη θέση Α αντίστοιχα. Τα σώματα είναι κομμάτια λάσπης με μάζα m το καθένα. Μπορούμε να αφήνουμε το κάθε κομμάτι λάσπης ξεχωριστά την κατάλληλη χρονική στιγμή, ώστε να συγκρούεται πλαστικά με το σώμα που εκτελεί ταλάντωση.



Θεωρούμε τα σώματα σημειακά.

Ποιες σχέσεις είναι σωστές και γιατί.

Α. Αν αφήσουμε το κομμάτι λάσπης (1) και οι ενέργειες ταλάντωσης πριν και μετά την κρούση είναι $Ε_{πριν}$, $Ε_{μετά}$, η σχέση μεταξύ τους είναι

α .) $Ε_{πριν} = 2Ε_{μετά}$ β) $Ε_{πριν} = \sqrt{2}Ε_{μετά}$

Β. Αν αφήσουμε το κομμάτι λάσπης (2) και οι ενέργειες ταλάντωσης πριν και μετά την κρούση είναι $Ε΄_{πριν}$, $Ε΄_{μετά}$, η σχέση μεταξύ τους είναι

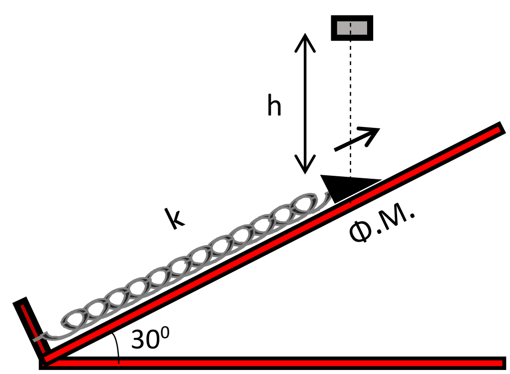
α) $Ε΄_{πριν} = \frac{3}{8}Ε΄_{μετά}$ β .) $Ε΄_{πριν} = \frac{5}{8}Ε΄_{μετά}$

Γ. Αν αφήσουμε το κομμάτι λάσπης (3) και τα μέτρα των μέγιστων ταχυτήτων πριν και μετά την κρούση είναι $u΄΄_{(max)πριν}$, $u΄΄_{(max)μετά}$, η σχέση μεταξύ τους είναι

α) $u΄΄_{(max)πριν} = 2\, u΄΄_{(max)μετά}$ β .) $u΄΄_{(max)πριν} = \sqrt{2}u΄΄_{(max)μετά}$

Εφαρμογή 5-β

Η σφήνα μάζας Μ =1Kg συνδέεται με το δεξιό άκρο του ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m και εκτελεί ΑΑΤ με πλάτος Α= 0,1m , στο λείο πλάγιο επίπεδο κλίσης 30^0. Το άλλο άκρο του ελατηρίου συνδέεται σε σταθερό σημείο. Στην κατακόρυφη που διέρχεται από τη θέση του φυσικού. μήκους του ελατηρίου και σε ύψος h= 0,15m από το πλάγιο επίπεδο , κρατάμε κομμάτι λάσπης μάζας $m_λ$ = 1Kg. Αφήνουμε τη λάσπη την κατάλληλη χρονική στιγμή ώστε να συγκρουστεί πλαστικά με τη σφήνα , όταν διέρχεται από τη θέση του Φ.Μ. του ελατηρίου προς τα πάνω. Θεωρούμε τα σώματα σημειακά.



Να βρείτε

α) Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας της σφήνας πριν την κρούση. (u_{max} =1m/s)

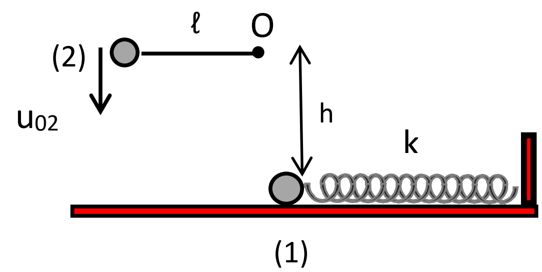
β) Το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος λάσπης- σφήνας. (Α΄=0,1m)

γ) Τη θερμότητα που εκλύεται κατά την πλαστική κρούση. ($Q=\frac{15}{8}$ J)

δ) Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας του συσσωματώματος λάσπης- σφήνας ($u΄_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ m/s)

Παράδειγμα 6

Η ακίνητη σφαίρα (1) μάζας m_1 =3Kg συνδέεται με το αριστερό άκρο του ιδανικού, οριζόντιου, ελατηρίου σταθεράς k=300N/m και είναι πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Το άλλο άκρο του ελατηρίου συνδέεται σε σταθερό σημείο. Σε ύψος h=0,45m από τη σφαίρα (1) υπάρχει σταθερό σημείο Ο με το οποίο συνδέεται το δεξιό άκρο αβαρούς, μη ελαστικού, οριζόντιου νήματος μήκους ℓ =0,45 m με το αριστερό άκρο του οποίου συνδέεται σφαίρα (2) μάζας m_2 =1Kg, την οποία κρατάμε ακίνητη με το νήμα τεντωμένο. Κάποια στιγμή δίνουμε στη σφαίρα (2) κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου u_{02} προς τα κάτω. Η σφαίρα (2) συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα (1) και στη συνέχεια εκτελεί κυκλική κίνηση. Η ταχύτητα της σφαίρας (1) μηδενίζεται στη θέση που την κρατούσαμε ακίνητη. Θεωρούμε τα σώματα. χωρίς διαστάσεις.



Να βρεθούν

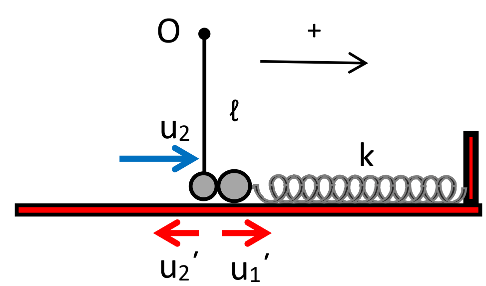
α) Το μέτρο της ταχύτητας u_{02}

β) Το πλάτος ταλάντωσης της σφαίρας (1)

Απάντηση

α)

Το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας (2) λίγο πριν την κρούση είναι u_2 , το μέτρο της ταχύτητας της (2) μετά την κρούση είναι $u_2΄$ και το μέτρο της σφαίρας (1) μετά την κρούση είναι $u_1΄$. Η θετική φορά είναι προς τα δεξιά.



Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για τη σφαίρα (2) από τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση , μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά της.

$\frac{1}{2} m_2 u_2΄^2 = m_2 g ℓ \Rightarrow u_2΄^2 = 2gℓ \Rightarrow u_2΄^2 = 2gℓ = 20 \cdot 0{,}45 \Rightarrow u_2΄^2 = 9 \Rightarrow u_2΄ = 3m/s$

Από την εξίσωση της ταχύτητας $u_2΄$ στην κεντρική – ελαστική κρούση έχουμε $u_2' = \frac{m_2-m_1}{m_2+m_1} \cdot u_2 \Rightarrow$

$-3 = \frac{1-3}{1+3} \cdot u_2$ => $u_2 = 6$ m/s

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για τη σφαίρα (2) από τη στιγμή που της δίνουμε την ταχύτητα u_{02} μέχρι τη στιγμή λίγο πριν την κρούση.

$\frac{1}{2} m_2 u_{02}^2 + m_2 g \ell = \frac{1}{2} m_2 u_2^2$ => $u_{02}^2 + 2 g \ell = u_2^2$ => $u_{02}^2 = u_2^2 - 2 g \ell = 36 - 9 = 27$

Άρα $u_{02} = 3\sqrt{3}$ m/s

β)

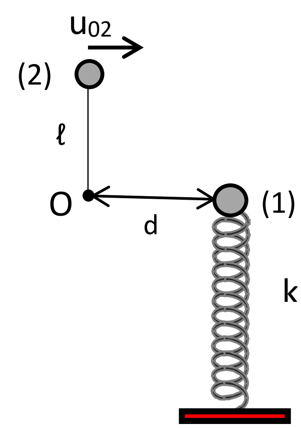
Από την εξίσωση της ταχύτητας u_1' στην κεντρική – ελαστική κρούση έχουμε $u_1' = \frac{2m_2}{m_2+m_1} \cdot u_2$ =>

$u_1' = \frac{2}{1+3} \cdot 6$ => $u_1' = 3$ m/s

Η u_1' είναι η u_{max} της ταλάντωσης της σφαίρας (1) $u_1' = u_{max} = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$ A => 3 = 10 A => A=0,3m

Εφαρμογή 6

Η ακίνητη σφαίρα (1) μάζας m_1 =2Kg συνδέεται με το πάνω άκρο του ιδανικού, κατακόρυφου , ελατηρίου σταθεράς k=800N/m. Το άλλο άκρο του ελατηρίου συνδέεται με το δάπεδο. Στο ίδιο ύψος με το σώμα (1) και σε οριζόντια απόσταση d=0,3m υπάρχει σταθερό σημείο Ο με το οποίο συνδέεται το κάτω άκρο αβαρούς, μη ελαστικού, κατακόρυφου νήματος μήκους ℓ =0,3 m ,με το πάνω άκρο του οποίου συνδέεται σφαίρα (2) μάζας m_2 =1Kg τη οποία κρατάμε ακίνητη, με το νήμα τεντωμένο.



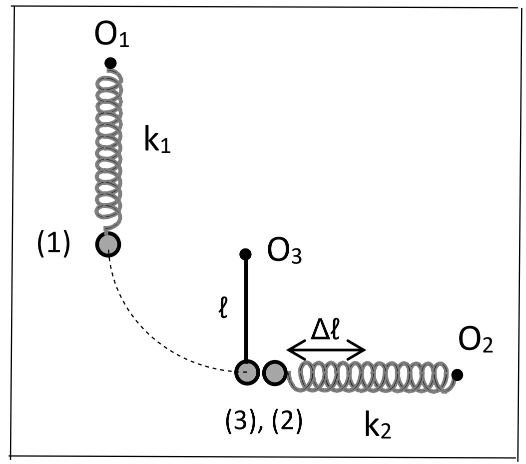
Κάποια στιγμή δίνουμε στη σφαίρα (2) οριζόντια ταχύτητα μέτρου u_{02} προς τα δεξιά. Η σφαίρα (2) συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα (1) και στη συνέχεια εκτελεί κυκλική κίνηση , κάνοντας ανακύκλωση με την ελάχιστη ταχύτητα. Θεωρούμε τα σώματα. χωρίς διαστάσεις.

Να βρεθούν

α) Το μέτρο της ταχύτητας u_{02} ($u_{02} = 5\sqrt{3}$ m/s)

β) Το πλάτος ταλάντωσης της σφαίρας (1) (A= 0,3 m)

Παράδειγμα 7



Τα ελατήρια με σταθερές k_1=75N/m και k_2=100N/m βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συνδέονται με τα ισομεγέθη σώματα m_1=3kg και m_2=1kg αντίστοιχα. Τα άλλα άκρα των ελατηρίων συνδέονται με τα σταθερά σημεία O_1 και O_2. Ένα τρίτο σώμα m_3=1kg που έχει το ίδιο μέγεθος με τα άλλα είναι σε επαφή με το m_2 και συνδέεται με νήμα μήκους ℓ του οποίου το άλλο άκρο συνδέεται με σταθερό σημείο O_3. Τα σώματα είναι ακίνητα. Η κάτοψη του συστήματος φαίνεται στο σχήμα. Μετατοπίζουμε προς τα δεξιά το σώμα m_2 κατά Δℓ=0,4 m και τη χρονική στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο. Το m_2 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το m_3, το m_3 διαγράφει τεταρτοκύκλιο και μετά συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το m_1 . Στο χρονικό διάστημα από τη στιγμή της πρώτης κρούσης του m_1 με το m_3 μέχρι τη στιγμή της δεύτερης κρούσης του m_1 με το m_3 το σώμα m_1 εκτελεί μιάμιση ταλάντωση.

Να βρείτε

α) Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος m_1

β) Το μήκος ℓ του νήματος

γ)Το χρονικό διάστημα Δt από t=0, μέχρι να επανέλθουν όλα τα σώματα στην κατάσταση που ήταν τη χρονική στιγμή t=0 για δεύτερη φορά.

Απάντηση

α) Λίγο πριν την 1η κρούση μεταξύ των m_2 - m_3 η $u_{2max\ (1)}$ είναι :

$u_{2max\ (1)} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} A_{2(1)}$ =4m/s

Αμέσως μετά την 1η κρούση : u_3'=4m/s και u_2'=0

Λίγο πριν την $2^η$ κρούση u_3'=4m/s και u_1=0 γιατί η κίνηση του m_3 είναι ομαλή κυκλική κίνηση αφού το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο.

$u_3'' = \frac{m_3 - m_1}{m_3 + m_1} \cdot u_3' = -2m/s$ $\qquad u_1' = \frac{2m_3}{m_3+m_1} \cdot u_3' = 2m/s$.

Η $u_1' = u_{1(max)} = 2m/s$ όμως $u_{1(max)} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} A_1$ => $2 = 5 \cdot A_1$ => $A_1 = \frac{2}{5} = 0{,}4m$

β) Ο χρόνος για μιάμιση ταλάντωση του m_1 είναι $\Delta t = \frac{3T_1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2\pi}{5} = 3\frac{\pi}{5}s$

Ο χρόνος για να επανέλθει το m_3 στην ίδια θέση είναι :

$$\Delta t = \frac{T_{κυκ.1}}{2} + \frac{T_{ταλ2}}{2}$$

όπου $T_{κυκ1}$ η περίοδος της κυκλικής κίνησης του m_3 και $T_{ταλ2}$ η περίοδος ταλάντωσης του m_2. Το m_3 κάνει ομαλή κυκλική κίνηση, κρούση με το m_2 όπου ανταλλάσσουν ταχύτητες άρα σταματάει, στη συνέχεια το m_2 κάνει μισή ταλάντωση και ξανακάνει κρούση με το ακίνητο m_3 όπου ξανά ανταλλάσσουν ταχύτητες, με το m_2 να σταματάει και το m_3 να κάνει ομαλή κυκλική κίνηση μέχρι να συναντήσει το m_1 στη θέση που έγινε η $1^η$ κρούση μεταξύ των $m_3 - m_1$.

$\Delta t = \frac{\frac{2\pi\ell}{2}}{2} + \frac{\frac{2\pi}{10}}{2} = \frac{\pi\,\ell}{2} + \frac{\pi}{10}$ επομένως $\frac{3\pi}{5} = \frac{\pi\,\ell}{2} + \frac{\pi}{10} \rightarrow \frac{\ell}{2} = \frac{6-1}{10} = 1/2 \rightarrow \ell = 1m$

γ) Μετά την $2^η$ κρούση μεταξύ των m_3-m_1 οι ταχύτητές τους είναι :

$u_3''' = \frac{m_3 - m_1}{m3 + m_1} \cdot (-u_3'') + 2\frac{m_1}{m_3+m_1} (-u_1') = \frac{1-3}{4} \cdot 2 - \frac{12}{4} = -4m/s$

$u_1'' = \frac{2m_3}{m_3+m_1} \cdot (-u_1') + \frac{m_1 - m_3}{m_3+m_1} (-u_3'') = -\frac{2 \cdot 2}{4} + \frac{2}{4}(+2) = 0$

Άρα το m_1 ακινητοποιείται. και το m_3 εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα μέτρου u=4m/s και η περίοδος της κυκλικής κίνησης μετά την $2^η$ κρούση μεταξύ των m_1-m_3 είναι $T'_{κυκ.2} = 2\pi/4 = \pi/2$.

Στη συνέχεια το m_3 κάνει κρούση με το m_2 και ακινητοποιείται ενώ το m_2 αποκτάει ταχύτητα 4m/s με κατάληξη να αποκτήσει πλάτος Α=0,4 m όπως ήταν τη χρονική στιγμή t=0. Μετά επαναλαμβάνεται το ίδιο περιοδικό φαινόμενο.

Παίρνουμε τα χρονικά διαστήματα μεταξύ των κρούσεων , τα χρονικά διαστήματα που τα σώματα είναι ακίνητα και τα χρονικά διαστήματα που τα κινούνται

- Από t=0 μέχρι την 1η κρούση $\Delta t_1=\frac{2\pi}{40}=\frac{\pi}{20}$s Το m_2 κινείται , το m_3 είναι ακίνητο και το m_1 είναι ακίνητο
- Από την 1η κρούση μέχρι την 2η κρούση $\Delta t_2=\frac{T\kappa\upsilon\kappa(2)}{4}=\frac{\pi}{8}$s . Το m_2 είναι ακίνητο , το m_3 κινείται και το m_1 είναι ακίνητο

- Από την 2η κρούση μέχρι την 3η κρούση $\Delta t_3=\frac{T\kappa\upsilon\kappa(1)}{4}=\frac{\pi}{4}$s. Το m_2 είναι ακίνητο , το m_3 κινείται και το m_1 κινείται.

- Από την 3η κρούση μέχρι την 4η κρούση $\Delta t_4=\frac{T\tau\alpha\lambda(2)}{2}=\frac{2\pi}{20}=\frac{\pi}{10}$s. Το m_2 κινείται, το m_3 είναι ακίνητο και το m_1 κινείται.

- Από την 4η κρούση μέχρι την 5η κρούση $\Delta t_5=\frac{T\kappa\upsilon\kappa(1)}{4}=\frac{\pi}{4}$s. Το m_2 είναι ακίνητο , το m_3 κινείται και το m_1 κινείται.

- Από την 5η κρούση μέχρι την 6η κρούση $\Delta t_6=\frac{T\kappa\upsilon\kappa(2)}{4}=\frac{\pi}{8}$s. Το m_2 είναι ακίνητο , το m_3 κινείται και το m_1 είναι ακίνητο.

- Από την 6η κρούση μέχρι την αρχική κατάσταση $\Delta t_1=\frac{T\kappa\upsilon\kappa(2)}{4}=\frac{\pi}{20}$s. Το m_2 κινείται, το m_3 είναι ακίνητο και το m_1 είναι ακίνητο

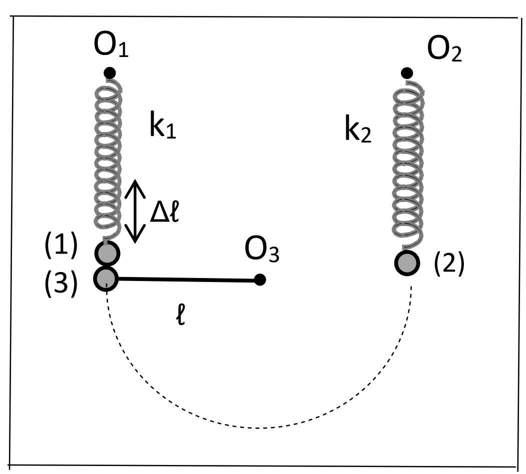
Άρα

$\Delta t_{o\lambda}=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{20} = \frac{19}{20}\pi$ s για 1η φορά

Για 2η φορά $\Delta t_{o\lambda(2)}= 2\cdot\Delta t_{o\lambda}=\frac{38}{20}\pi$ s

Εφαρμογή 7

Τα ελατήρια με σταθερές k_1=100N/m και k_2=300N/m βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συνδέονται με τα ισομεγέθη σώματα m_1=1kg και m_2=3kg αντίστοιχα. Τα άλλα άκρα των ελατηρίων συνδέονται με τα σταθερά σημεία O_1 και O_2. Ένα τρίτο σώμα m_3=1kg που έχει το ίδιο μέγεθος με τα άλλα είναι σε επαφή με το m_1 και συνδέεται με νήμα μήκους ℓ του οποίου το άλλο άκρο συνδέεται με σταθερό σημείο O_3. Τα σώματα είναι



ακίνητα. Η κάτοψη του συστήματος φαίνεται στο σχήμα.

Μετατοπίζουμε προς τα πάνω το σώμα m_1 κατά $\Delta\ell$=0,4 m και τη χρονική στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο. Το m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το m_3, το m_3 διαγράφει μισό κύκλο και μετά συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το m_2 . Στο χρονικό διάστημα από τη στιγμή της πρώτης κρούσης του m_3 με το m_2 μέχρι τη στιγμή της δεύτερης κρούσης του m_3 με το m_2 το σώμα m_2 εκτελεί δυόμιση ταλαντώσεις.

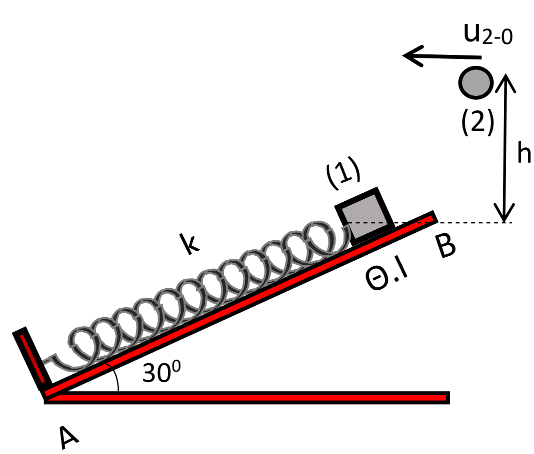
Να βρείτε

α) το πλάτος ταλάντωσης του σώματος m_2 (A_2 = 0,2m)

β) Το μήκος ℓ του νήματος (ℓ = 0,4m)

γ) Το χρονικό διάστημα Δt από t=0 μέχρι να επανέλθουν όλα τα σώματα στην κατάσταση που ήταν τη χρονική στιγμή t=0 για δεύτερη φορά. ($\Delta t_{(\text{δεύτερη φορά})}$ = 2π s)

Παράδειγμα 8



Το σώμα (1) μάζας m_1=2Kg συνδέεται με το ένα άκρο του ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m και είναι ακίνητο πάνω στο λείο πλάγιο επίπεδο ΑΒ κλίσης 30^0. Το άλλο άκρο του ελατηρίου συνδέεται σε σταθερό σημείο. Το σημείο Β είναι η θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Από ύψος h από το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σώμα (1), δίνουμε οριζόντια ταχύτητα u_{20} στο σώμα (2) μάζας m_2= 2Kg. Το σώμα (2) συγκρούεται πλαστικά με το σώμα (1). Η ταχύτητα του σώματος (2) λίγο πριν συγκρουστεί με το σώμα (1) , σχηματίζει γωνία 30^0 με τη διεύθυνση του πλάγιου επιπέδου. Κατά την ταλάντωση του συσσωματώματος η ταχύτητά του μηδενίζεται στο σημείο Β. Θεωρούμε τα σώματα χωρίς διαστάσεις.

Να βρεθούν

α) Το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος.

β) Το ύψος h

γ) Το μέτρο της ταχύτητας $u_{2\text{-}0}$

Απάντηση

α)

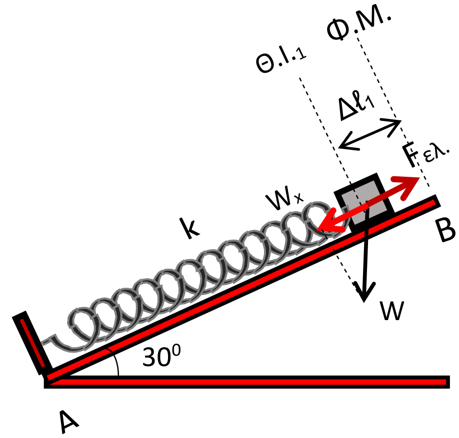
Η συσπείρωση του ελατηρίου $\Delta\ell_1$ του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος (1), [Σχ.α] βρίσκεται από τη σχέση ΣF=0.

Θεωρούμε άξονα x στη διεύθυνση του πλάγιου επιπέδου και αναλύουμε το βάρος σε $w_x = w\,ημ30^0$.

=> $w_x = 10N$

Άρα $ΣF_x = 0$ => $F_{ελ.} - w_x = 0$ => $k\,\Delta\ell_1 = 10$ =>

$100\,\Delta\ell_1 = 10$ => $\Delta\ell_1 = 0{,}1m$



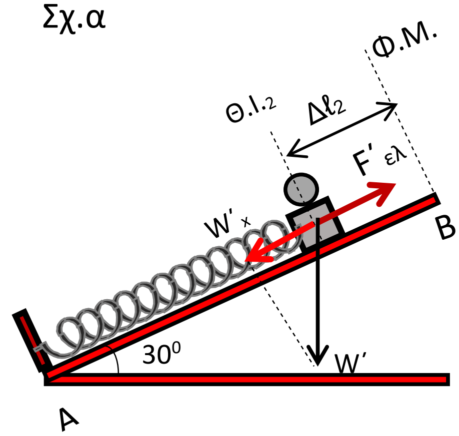
Σχ.α

Η συσπείρωση του ελατηρίου $\Delta\ell_2$ του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος , βρίσκεται από τη σχέση ΣF΄=0. (Σχ.β)

$w'_x = w'\,ημ30^0$ => $w'_x = 20N$

Άρα $ΣF'_x = 0$ => $F'_{ελ.} - w'_x = 0$ => $k\,\Delta\ell_2 = 20$

$100\,\Delta\ell_2 = 20$ => $\Delta\ell_2 = 0{,}2m$



Σχ.β

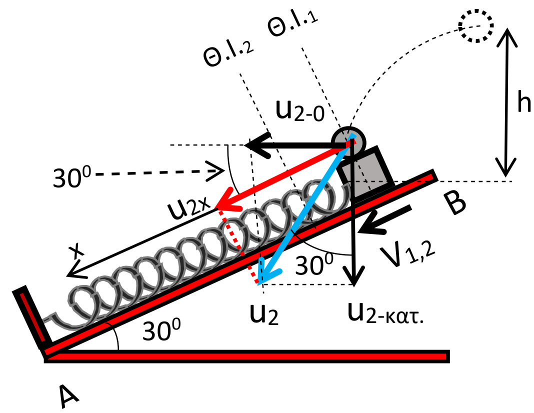
Επειδή κατά την ταλάντωση του συσσωματώματος η ταχύτητά του μηδενίζεται στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου , στο σημείο Β, το σημείο Β είναι ακραία θέση και το πλάτος ταλάντωσης είναι $A = \Delta\ell_2 = 0{,}2m$

β,γ)

Στο Σχ.γ η ταχύτητα u_2 είναι η ταχύτητα του σώματος (2) λίγο πριν την κρούση , η $u_{2-κατ.}$ είναι η κατακόρυφη συνιστώσα της u_2 , η u_{2-0} είναι η οριζόντια συνιστώσα της u_2 και η u_{2x} είναι η συνιστώσα της u_2 στη διεύθυνση του πλάγιου επιπέδου.

Από το σχήμα $u_{2-κατ.} = u_{2x} = u_2$ συν30^0 (1)

και $u_{2-0} = u_2$ συν$60^0 = u_2/2$ (2)



Σχ.γ

Η ταχύτητα $V_{1,2}$ του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση στη Θ.Ι.$_1$ βρίσκεται από την ΑΔΕ$_{ταλ.}$

$E=K+U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{1,2}^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2 - \Delta\ell_1)^2 \Rightarrow 100 \cdot 0{,}2^2 = 4V_{1,2}^2 + 100(0{,}2-0{,}1)^2$

$\Rightarrow 4 = 4V_{1,2}^2 + 1 \Rightarrow 4V_{1,2}^2 = 3 \Rightarrow V_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m/s

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για την πλαστική κρούση , στη διεύθυνση του πλάγιου επιπέδου x.

$p_{ολ.x(πριν)} = p_{ολ.x(μετά)} \Rightarrow m_2 u_{2x} = (m_1+m_2)V_{1,2} \Rightarrow 2u_{2x} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow u_{2x} = \sqrt{3}$ m/s (3)

Από τις εξισώσεις της ελεύθερης πτώσης του σώματος (2) έχουμε $u_{2-κατ} = gt$, $h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow$

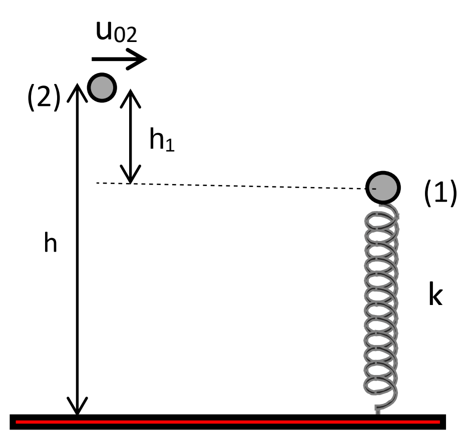
$u_{2-κατ} = \sqrt{2gh}$ και λόγω των σχέσεων (1),(3) $\sqrt{3} = \sqrt{2gh} \Rightarrow h = \frac{3}{20} \Rightarrow h = 0{,}15$m (το β)

Από τις σχέσεις (1),(3) προκύπτει η u_2 : $u_{2x} = u_2$ συν$30^0 \Rightarrow \sqrt{3} = u_2\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow u_2 = 2$ m/s

και από τη σχέση (2) προκύπτει η u_{2-0} : $u_{2-0} = u_2/2 = 2/2 = 1$m/s (το γ)

Εφαρμογή 8

Η ακίνητη σφαίρα (1) μάζας $m_1 = 1$Kg συνδέεται με το πάνω άκρο του ιδανικού, κατακόρυφου , ελατηρίου σταθεράς k=100N/m. Το άλλο άκρο του ελατηρίου συνδέεται με το δάπεδο. Από ύψος h=1m από το δάπεδο και από ύψος h_1 από το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σώμα (1) , δίνουμε οριζόντια ταχύτητα u_{02} στο σώμα (2) μάζας $m_2 = 1$Kg. Το σώμα (2) συγκρούεται ελαστικά , μη κεντρικά με το σώμα (1). Η ταχύτητα του



σώματος (2) λίγο πριν την κρούση σχηματίζει γωνία 30^0 με το οριζόντιο επίπεδο. Μετά την κρούση το σώμα (1) εκτελεί κατακόρυφα ΑΑΤ με πλάτος Α= 0,2m . Θεωρούμε τα σώματα χωρίς διαστάσεις.
Να βρεθούν

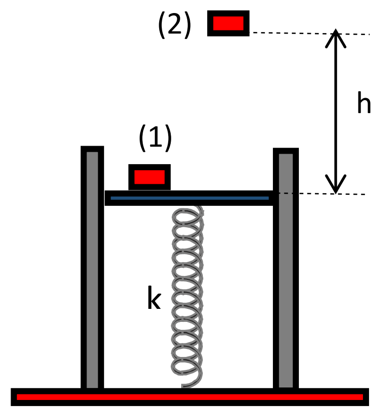
α) Το μέτρο της ταχύτητας u_{02} ($u_{02} = 2\sqrt{3}$ m/s)

β) Το ύψος h_1 (h_1 = 0,2m)

γ) Η κινητική ενέργεια του σώματος (2) , λίγο πριν πέσει στο δάπεδο. (Κ= 14J)

Παράδειγμα 9

Το μέσο της οριζόντιας ομογενούς σανίδας μάζας Μ=2Kg συνδέεται με το πάνω άκρο του κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=400 N/m και είναι ακίνητη. Το κάτω άκρο του ελατηρίου συνδέεται με το δάπεδο. Τα άκρα της σανίδας είναι σε επαφή με τις λείες επιφάνειες κατακόρυφων τοιχωμάτων και πάνω της είναι σώμα (1) μάζας m_1=2Kg Από ύψος h=0,8m από τη σανίδα αφήνουμε το σώμα (2) το οποίο συγκρούεται πλαστικά με τη σανίδα. Θεωρούμε τα σώματα (1),(2) χωρίς διαστάσεις.



Να βρεθούν

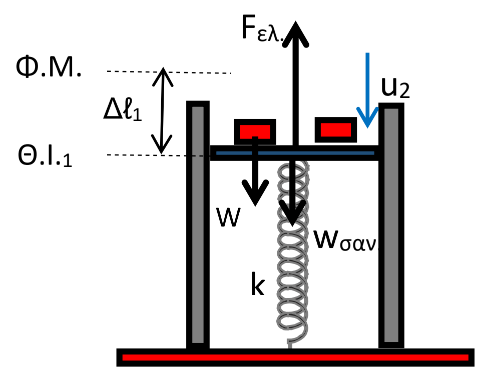
α) Η ταχύτητα της σανίδας αμέσως μετά την κρούση.

β) Το πλάτος ταλάντωσης της σανίδας.

Απάντηση

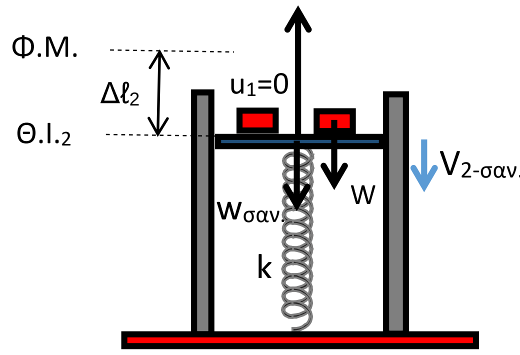
α) Στο Σχ.α το μέτρο της ταχύτητας του σώματος (2) λίγο πριν πέσει στη σανίδα, από την ΑΔΜΕ είναι $u_2 = \sqrt{2gh}$ => $u_2 = \sqrt{16}$ => u_2 = 4 m/s (1)

Η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι.$_1$ προκύπτει από $\Sigma F_{(\text{κατακόρυφα})} = 0$ => $F_{ελ.} = w + w_{σαν.}$ => $k\,\Delta\ell_1 = 40$ => $k\,\Delta\ell_1 = 40$ => $400\,\Delta\ell_1 = 40$ => $\Delta\ell_1$ = 0,1m (2)



Σχ.α

$F'_{ελ.}$



Σχ.β

Στο Σχ. β ,αμέσως μετά την κρούση το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος σανίδας-σώματος (2) είναι $V_{2\text{-σαν}}$ λόγω των ωστικών δυνάμεων μεταξύ τους κατά την κρούση. Η ταχύτητα του σώματος (1) είναι μηδέν γιατί τη στιγμή της κρούσης σώματος (2) – σανίδας δεν του ασκείται ωστική δύναμη για να του αλλάξει την ορμή, δηλαδή την ταχύτητα. Αμέσως μετά την κρούση, το σώμα (1) χάνει τη επαφή του με τη σανίδα αφού στο τέλος της κρούσης η σανίδα έχει ταχύτητα προς τα κάτω. Μετά την κρούση το σώμα (1) λόγω του βάρους του εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για τα σώματα που συγκρούονται στην κατακόρυφη διεύθυνση.

$p_{ολ.x(πριν)} = p_{ολ.x(μετά)}$ => $m_2\ u_2 = (m_2 + m_{σαν.})\ V_{2\text{-σαν.}}$ και λόγω της σχέσης (1) $2 \cdot 4 = 4\ V_{2\text{-σαν.}}$

=> $V_{2\text{-σαν}} = 2$ m/s

β)

Η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι.$_2$ της ταλάντωσης του συσσωματώματος σανίδας-σώματος (2) είναι $\Sigma F_{(κατακόρυφα)} = 0$ => $F'_{ελ.} = w + w_{σαν}$ => $k\ \Delta\ell_2 = 40$ => $400\ \Delta\ell_2 = 40$ => $\Delta\ell_2 = 0{,}1$m

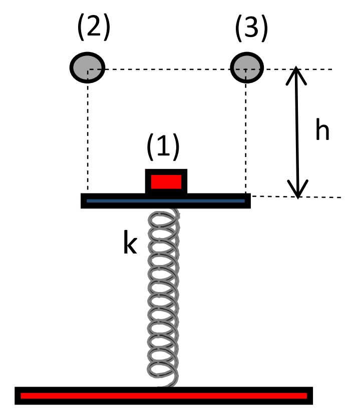
Επομένως οι Θ.Ι.$_1$ και Θ.Ι.$_2$ ταυτίζονται. Άρα η $V_{2\text{-σαν}} = 2$ m/s είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος σανίδας-σώματος (2)

Από τη σχέση της μέγιστης ταχύτητας της ταλάντωσης $u_{max} = V_{2\text{-σαν}} = \sqrt{\frac{k}{m_{ολ}}}A$ => $2 = 10 \cdot A$

=> $A = 0{,}2$m

Εφαρμογή 9

Το μέσο της οριζόντιας ομογενούς σανίδας μάζας M=1Kg συνδέεται με το πάνω άκρο του κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=100 N/m και είναι ακίνητη. Το κάτω άκρο του ελατηρίου συνδέεται με το δάπεδο. Πάνω στη σανίδα , στο μέσο της είναι το σώμα (1) μάζας m_1=1Kg Από ύψος h=0,15m από τη σανίδα αφήνουμε ταυτόχρονα τις ίδιες σφαίρες (2),(3), με μάζα m=0,5Kg η κάθε μία. Οι σφαίρες συγκρούονται ελαστικά με τα άκρα της σανίδας. Θεωρούμε τα σώματα (1),(2),(3) χωρίς διαστάσεις



Να βρείτε

α) Την ταχύτητα της σανίδας αμέσως μετά την κρούση. ($u_{σαν} = \sqrt{3}$ m/s)

β) Τις ταχύτητες των σωμάτων (1),(2), (3) αμέσως μετά την κρούση. (u_1=u_2 = u_3 =0)

γ) Το πλάτος ταλάντωσης της σανίδας. (A=0,2m)

pananasgiannis@yahoo.gr