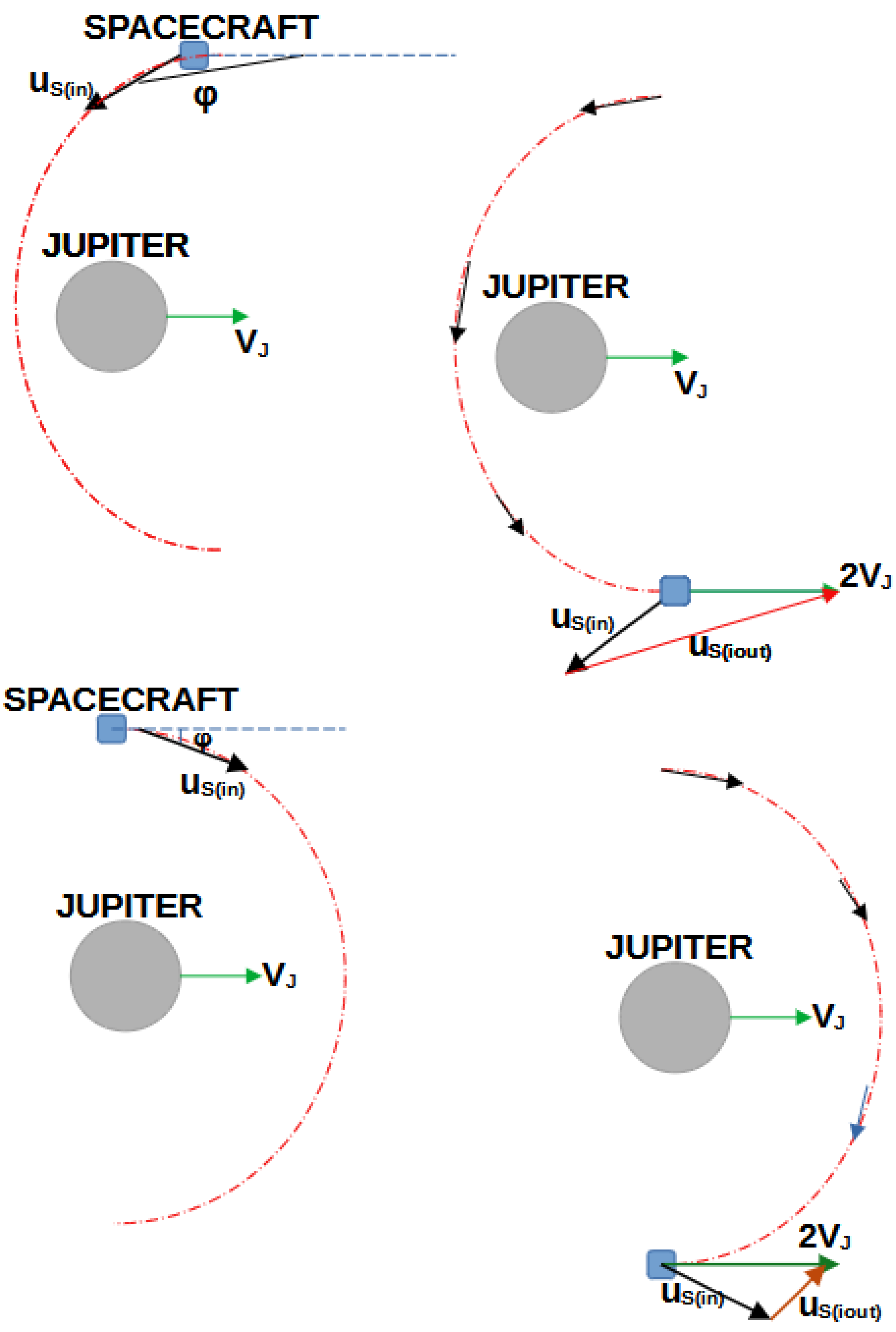


Διαστημόπλοιο εισέρχεται στη σφαίρα επιρροής του Δία όπου αλληλοεπιδρά μόνο με το βαρυτικό πεδίο του Δία με ταχύτητα $u_{S(IN)}$ ως προς τον ήλιο. Η $u_{S(IN)}$ σχηματίζει γωνία φ με την ταχύτητα του πλανήτη και το διαστημόπλοιο εισέρχεται στη σφαίρα επιρροής του Δία με δύο τρόπους όπως φαίνεται στα σχήματα πάνω και κάτω.

Η ταχύτητα του Δία στην τροχιά του είναι $V_J$ = 13 km/s και θεωρούμε ότι στο μικρό χρονικό διάστημα της αλληλεπίδρασης κινείται ευθύγραμμα.

Στον τρόπο που δείχνουν τα πάνω σχήματα θέλουμε το διαστημόπλοιο κατά την έξοδό του από τη σφαίρα επιρροής του Δία να έχει ως προς τον ήλιο μεγαλύτερη κατά μέτρο ταχύτητα από αυτήν που είχε κατά την είσοδο, ενώ με τον δεύτερο τρόπο μικρότερη.

**Α)** Γιατί ισχύουν οι αρχές διατήρησης ορμής και ενέργεια από την είσοδο μέχρι την έξοδο από τη σφαίρα επιρροής του Δία;

**Β)** Με εφαρμογή των δύο παραπάνω αρχών βρείτε μία έκφραση για την ταχύτητα εξόδου $u_{S(OUT)}$ του διαστημόπλοιου από τη σφαίρα επιρροής του πλανήτη σαν συνάρτηση των $u_{S(IN)}$, $V_J$, φ και για τους δύο τρόπους.

**Γ)**Ποια σχέση πρέπει να συνδέει τα $u_{S(IN)}$, $V_J$ , φ στον πρώτο τρόπο ώστε να πετύχουμε τελικά αύξηση της ταχύτητας του διαστημόπλοιου; Πότε η $u_{S(OUT)}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της και ποια η μέγιστη τιμή.
Το Voyager 1 έφτασε στη σφαίρα επιρροής του Δία με ταχύτητα $u_{S(IN)}$ = 10 km/s και βγήκε με $u_{S(OUT)}$ = 30 km/s. Ποια η φ;

**Δ)** Ποια σχέση πρέπει να συνδέει τα $u_{S(IN)}$, $V_J$ , φ στον δεύτερο τρόπο ώστε να πετύχουμε τελικά μείωση της ταχύτητας του διαστημόπλοιου; Βρείτε ένα επιθυμητό ζευγάρι τιμών $u_{S(IN)}$ , φ στον Δία και βρείτε την $u_{S(OUT)} < u_{S(IN)}$

**Ε)** Στον πρώτο τρόπο που βρήκε το διαστημόπλοιο την επιπλέον κινητική ενέργεια και στον δεύτερο τι έγινε η κινητική ενέργεια που έχασε;

# *Λύση*

**Α)**Το πεδίο βαρύτητας είναι συντηρητικό πεδίο με αποτέλεσμα η μηχανική ενέργεια του συστήματος να διατηρείται σταθερή, επίσης κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης οι δυνάμεις που ενεργούν στο σύστημα είναι εσωτερικές ώστε να ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής

**Β)**Και για τους δύο τρόπους από την είσοδο στη σφαίρα επιρροής του Δία μέχρι την έξοδο(m η μάζα του διαστημόπλοιου, M>>>m η μάζα του Δία):

$\vec{P}_{αρχ} = \vec{P}_{τελ} \Rightarrow m\vec{u}_{S(IN)} + M\vec{V}_J = m\vec{u}_{S(OUT)} + M\vec{V}_J' \Rightarrow$

$\mathbf{m(\vec{u}_{S(IN)} - \vec{u}_{S(OUT)}) = M(\vec{V}_J' - \vec{V}_J)}$ **(1)**

$\frac{1}{2}mu_{S(IN)}^2 + \frac{1}{2}MV_J^2 = \frac{1}{2}mu_{S(OUT)}^2 + \frac{1}{2}MV_J'^2 \Rightarrow$

$\mathbf{m(u_{S(IN)} - u_{S(OUT)})(u_{S(IN)} + u_{S(OUT)}) = M(V_J' - V_J)(V_J' + V_J)}$ **(2)**

(1)(2)=> $\mathbf{\vec{u}_{S(IN)} + \vec{u}_{S(OUT)} = \vec{V}_J' + \vec{V}_J \Rightarrow}$

$\overrightarrow{\mathbf{u_{S(OUT)}}} = \overrightarrow{\mathbf{V_J'}} + \overrightarrow{\mathbf{V_J}} - \overrightarrow{\mathbf{u_{S(IN)}}}$ **(3)**

(1)=> $\frac{m}{M}(\overrightarrow{u_{S(IN)}} - \overrightarrow{u_{S(OUT)}}) = \overrightarrow{V_J'} - \overrightarrow{V_J}$ αλλά $\frac{m}{M}$ ->0 => $\overrightarrow{\mathbf{V_J'}} = \overrightarrow{\mathbf{V_J}}$**(4)**

(3)(4) => $\overrightarrow{\mathbf{u_{S(OUT)}}} = \overrightarrow{\mathbf{2V_J}} - \overrightarrow{\mathbf{u_{S(IN)}}}$ **(5)**

Νόμος συνημιτόνων στο τρίγωνο που σχηματίζουν $\overrightarrow{\mathbf{u_{S(IN)}}}$ **,** $\overrightarrow{\mathbf{u_{S(OUT)}}}$**,** $\overrightarrow{\mathbf{2V_J}}$

$$\mathbf{u_{S(OUT)}} = \sqrt{u_{S(IN)}^2 + 4V_J^2 - 4u_{S(IN)}V_J\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad \textbf{(6)}$$

**Γ)**Θέλουμε $\mathbf{u_{S(OUT)}} > \boldsymbol{u_{S(IN)}}$ **=>** $u_{S(IN)}^2 + 4V_J^2 - 4u_{S(IN)}V_J\sigma\upsilon\nu\varphi > u_{S(IN)}^2$ =>

$4V_J(V_J - u_{S(IN)}\sigma\upsilon\nu\varphi) > 0$ => $V_J > |u_{S(IN)}\sigma\upsilon\nu\varphi|$ $90^0 < \varphi \leq 180^0$

Η μεγαλύτερη τιμή για το $u_{S(OUT)}$ είναι για θ = $180^0$ (6)=>

$$\boldsymbol{u_{S(OUT)}^{max}} = \mathbf{u_{S(IN)} + 2V_J}$$

Δηλαδή στη θεωρητική περίπτωση που το διαστημόπλοιο θα έμπαινε στη σφαίρα επιρροής του πλανήτη με ταχύτητα αντίθετη της ταχύτητας του πλανήτη, κατά την έξοδό του θα είχε αυξήσει την ταχύτητά του 2 φορές την ταχύτητα του πλανήτη.

Αυτό μοιάζει με ένα τραίνο που έρχεται κατά πάνω μας με 100 km/h, πετάμε ένα μπαλάκι του τένις με 20 km/h, αυτό συγκρούεται ελαστικά με το τραίνο και ανακλάται με 220 km/h !!!

Για το Voyager 1 (6) => 900 = 100 + 676 – 4x13x10xσυνφ =>

=>συνφ = -124/520 => **φ = 103,8$^0$.**

**Δ)**Ομοίως $V_J < u_{S(IN)}\sigma\upsilon\nu\varphi$ $0 \leq \varphi < 90^0$

**$U_{S(IN)}$ = 36 km/s , φ = 45$^0$** (36χσυν45 = 25,5 > $V_J$)

(6) => $u_{S(OUT)} = \sqrt{1296 + 676 - 4\chi 36\chi 13\sigma\upsilon\nu 45}$ =>

**$U_{S(OUT)}$ = 25,46 km/s**

**Ε)**Η ενέργεια που κέρδισε το σκάφος στον πρώτο τρόπο είναι $\frac{1}{2}mu_{S(OUT)}^2 - \frac{1}{2}mu_{S(IN)}^2$

**Η ενέργεια αυτή αφαιρέθηκε από την τροχιακή κινητική ενέργεια του Δία** $\frac{1}{2}MV_J^2$. **Η ενέργεια που αφαιρέθηκε όμως είναι όμως αμελητέα**

**μπροστά στην τεράστια κινητική ενέργεια του Δία καθώς M = $2χ10^{27}$ kg και m = 500 kg.**

**Δηλαδή με τη μανούβρα gravity assist το διαστημόπλοιο αφαίρεσε ένα αμελητέο ποσό ενέργειας από την κινητική ενέργεια του Δία, η οποία όμως είναι πολύ σημαντική για το ίδιο.**

**Στον δεύτερο τρόπο η μείωση της κινητικής ενέργειας του διαστημόπλοιου γίνεται αύξηση της τροχιακής κινητικής ενέργειας του Δία που πάλι όμως είναι αμελητέα γι' αυτό ουσιαστικά η ταχύτητα του Δία δεν αυξάνεται.**