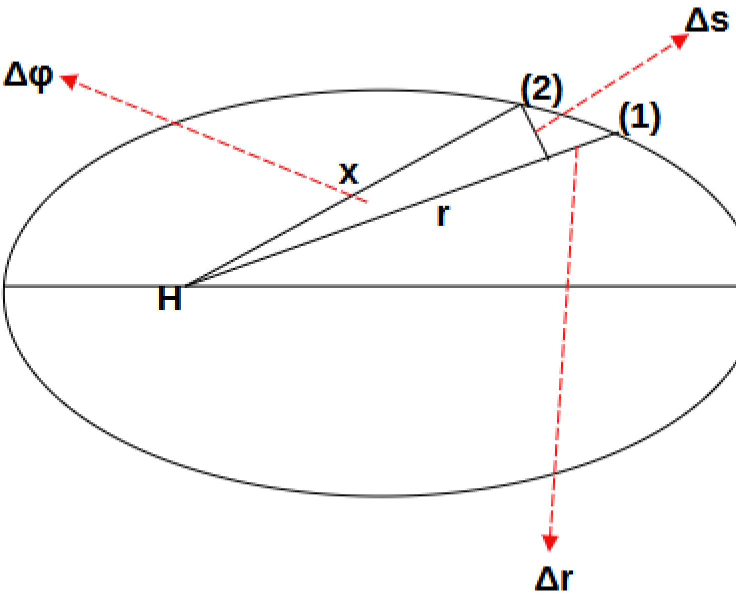
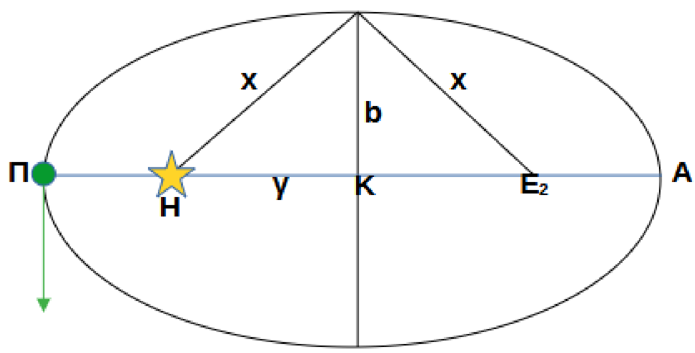


Στο παραπάνω σχήμα ένας πλανήτης κινείται σε ελλειπτική τροχιά και μεταβαίνει από τη θέση (1) στη (2). Από τη θέση (2) φέρνουμε κάθετη ΔS στην επιβατική ακτίνα r της θέσης (1). Το εμβαδόν του σχηματιζόμενου ορθογωνίου τριγώνου είναι ΔA και X = r -Δr. Μικραίνουμε τη γωνία έτσι ώστε Δφ -> 0 οπότε και Δr -> 0, έτσι το ΔS γίνεται χορδή ενός πολύ μικρού τόξου και μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ΔS είναι το μήκος αυτού του τόξου. Αν ω η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα του πλανήτη η ποσότητα $mr^2\omega$ ονομάζεται στροφορμή και μαζί με τη μηχανική ενέργεια είναι οι δύο σταθερές της κίνησης.

A) Δείξτε ότι ο ρυθμός με τον οποίο η επιβατική ακτίνα γράφει εμβαδόν ΔA/Δt είναι σταθερός. Η πρόταση αυτή αποτελεί τον δεύτερο νόμο του Kepler για την κίνηση των πλανητών γύρω από τον ήλιο.

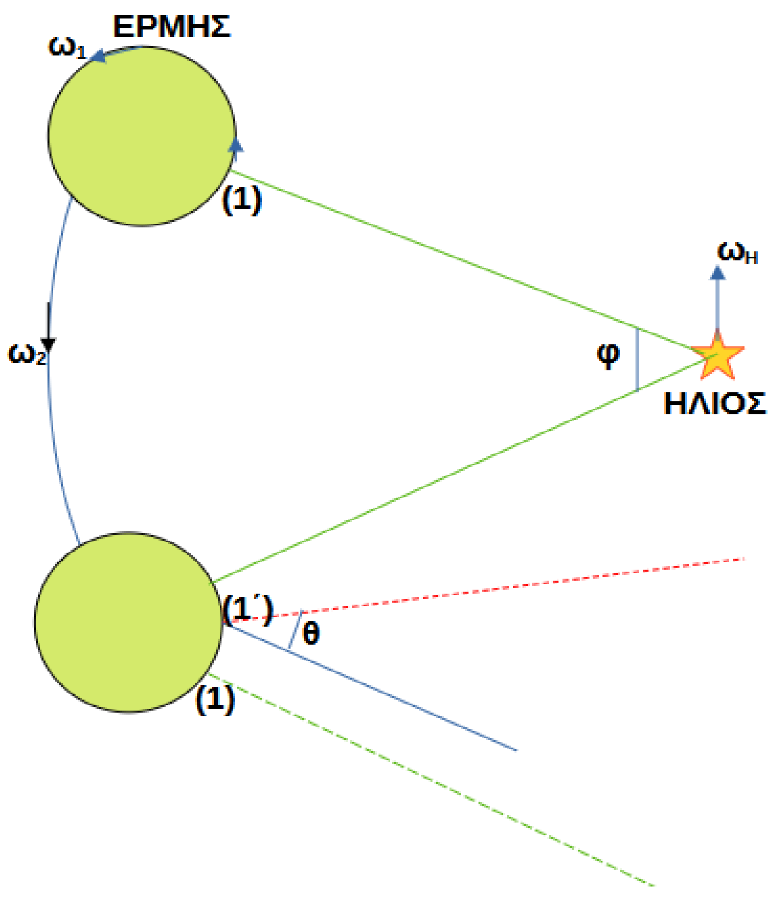
B)



Στο σχήμα πάνω βλέπουμε έναν πλανήτη σε ελλειπτική τροχιά. Ο ήλιος καταλαμβάνει τη μία από τις δύο εστίες. Π είναι η κοντινότερη θέση του πλανήτη στον ήλιο και ονομάζεται περιήλιο, Α είναι η πιο μακρινή και ονομάζεται αφήλιο. Μεγάλος ημιάξονας ΠΚ = ΑΚ = α, εκκεντρότητα e = γ/α. Δείξτε ότι ο μικρός ημιάξονας b της ελλειπτικής τροχιάς δίνεται από τη σχέση: $b = \alpha\sqrt{1-e^2}$.
Το εμβαδόν μιας έλλειψης δίνεται από τη σχέση Α = παb. Αν Τ η περίοδος περιφοράς του πλανήτη γύρω από τον ήλιο βρείτε τον μέσο ρυθμό με τον οποίο η επιβατική ακτίνα του πλανήτη γράφει εμβαδόν και στη συνέχεια βρείτε τη στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα του πλανήτη σε συνάρτηση με τα Τ,α,r,e. Σε ποια θέση της τροχιάς του πλανήτη η γωνιακή ταχύτητα γίνεται μέγιστη; Να γίνει εφαρμογή για τον Ερμή με: Τ = 87,9691 ημέρες , α = 57.910.000 km, απόσταση περιήλιου $r_Π$ = 46.000.000 km , e = 0,2.

Γ) Ο πλανήτης είναι σχεδόν σφαιρικός με μηδενική αξονική κλίση και περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του συμπληρώνοντας μία περιστροφή σε 58,646 ημέρες. Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα ω_1 περιστροφής του πλανήτη και συγκρίνετέ την με την γωνιακή ταχύτητα περιφοράς του πλανήτη στο περιήλιο ω_2.

.



Στο σχήμα πάνω βλέπουμε παρατηρητή στη θέση (1) στον ισημερινό του πλανήτη, όταν ο πλανήτης βρίσκεται στο περιήλιο της τροχιάς του, να παρατηρεί τον ήλιο κατά τη μεσημβρία. Σε χρόνο Δt γύρω από το περιήλιο ο πλανήτης έχει γράψει γωνία φ στην τροχιά του και ο παρατηρητής έχει μετακινηθεί από τη θέση (1) στην (1΄) έχοντας γράψει γωνία θ.
Πως βλέπει τον ήλιο να κινείται ο παρατηρητής;

Δ) Βρείτε την περίοδο περιφοράς του ήλιου γύρω από τον πλανήτη. Προφανώς το αποτέλεσμα που βρήκατε αντιπροσωπεύει την διάρκεια μιας ηλιακής ημέρας στον Ερμή, δηλαδή οι γήινες ημέρες από μεσημβρία σε μεσημβρία ή από ανατολή σε ανατολή.

ΛΥΣΗ

Α) ΔΑ = $\frac{1}{2}r\Delta S$, όταν Δφ ->0 => ΔS = rΔφ οπότε ΔΑ = = $\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi$ =>

$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ => $\boldsymbol{\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\omega}$ (1) => $\boldsymbol{\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2m}mr^2\omega}$ **= στροφορμή/2m = σταθερός.**

Β) Βασική ιδιότητα της έλλειψης: Χ + Χ = 2α => Χ = α
Εκκεντρότητα e = γ/α => γ = eα
Από το ορθογώνιο τρίγωνο: $b^2 = \chi^2 - \gamma^2 = \alpha^2 - e^2\alpha^2$ =>
$b = \alpha\sqrt{1-e^2}$
Ο μέσος ρυθμός με τον οποίο η επιβατική ακτίνα γράφει εμβαδόν είναι $\boldsymbol{\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi b\alpha}{T}}$ **(2)**
Επειδή όμως ο ρυθμός είναι σταθερός η μέση τιμή είναι ίδια με τη στιγμιαία. Έτσι (1)(2) => $\boldsymbol{\frac{1}{2}r^2\omega = \frac{\pi b\alpha}{T}}$ **=>** $\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi\alpha^2\sqrt{1-e^2}}{Tr^2}}$ **(3)**
Μέγιστη τιμή για την ω έχουμε όταν το r γίνεται ελάχιστο, δηλαδή στο περιήλιο.
Η γωνιακή ταχύτητα του Ερμή στο περιήλιο με βάση τα δεδομένα θα είναι $\boldsymbol{\omega = 1{,}2837\chi10^{-6}}$ **rad/s**

Γ) Η περίοδος περιστροφής του Ερμή γύρω από τον άξονά του είναι T_Π = 58,646 ημέρες επομένως η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του Ερμή θα είναι $\omega_1 = 2\pi/T_\Pi = 2\pi/(58{,}646\chi24\chi3600)$ => $\boldsymbol{\omega_1 = 1{,}24\chi10^{-6}}$ **rad/s**
Παρατηρούμε εδώ κάτι μοναδικό στο ηλιακό μας σύστημα. Η γωνιακή ταχύτητα περιφοράς του Ερμή γύρω από τον ήλιο $\omega_2 = \omega = 1{,}2837\chi10^{-6}$

rad/s είναι μεγαλύτερη από τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του ω_1 = $1{,}24\chi10^{-6}$ rad/s.
Δηλαδή στο σχήμα του ερωτήματος σε χρόνο Δt στο περιήλιο ο πλανήτης έχει μετακινηθεί στην τροχιά του κατά $\phi = \omega_2 \Delta t$ και ο παρατηρητής έχει περιστραφεί κατά $\theta = \omega_1 \Delta t < \phi$ και βλέπει τον ήλιο να έχει μετακινηθεί αριστερόστροφα ή από τη δύση προς την ανατολή.

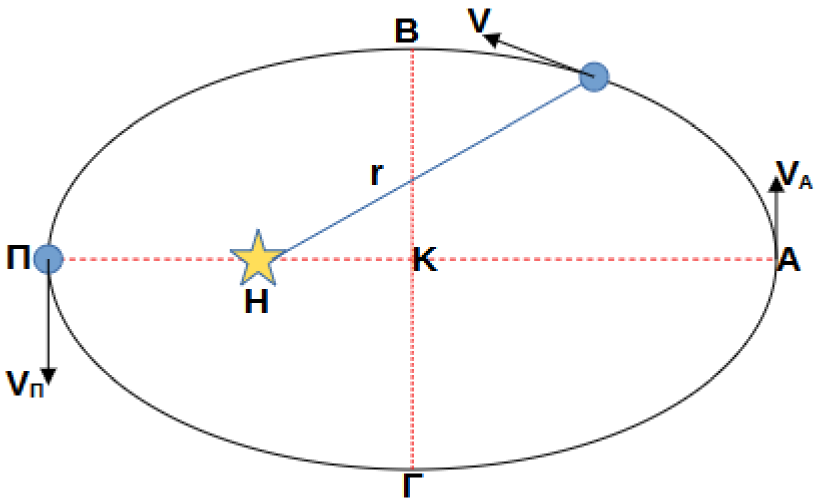
ΣΗΜ.1 4 ημέρες πριν φτάσει ο πλανήτης στο περιήλιο γίνεται φ = θ και ο ήλιος φαίνεται να σταματάει για λίγο μετά να γυρίζει προς την ανατολή και 4 ημέρες μετά επανέρχεται στην κανονικότητα.
ΣΗΜ.2 Αν ο πλανήτης βρίσκεται ας πούμε 6 ημέρες πριν το περιήλιο και ο ήλιος μόλις έχει ανατείλει τότε σε 2 ημέρες ο ήλιος θα γυρίσει προς την ανατολή θα δύσει στην …ανατολή και θα ξαναανατείλει!!!

Δ) Από το σχήμα του Γ) ερωτήματος θεωρώντας θ > φ στη γενική περίπτωση, Τ την περίοδο περιφοράς του Ερμή, T_Π την περίοδο περιστροφής του και T_H η φαινόμενη περίοδος κίνησης του ήλιου στον ουρανό έχουμε σε χρόνο t : $\phi_{ηλιου} = \theta - \phi$ => $\frac{2\pi}{T_H}t = \frac{2\pi}{T_\Pi}t - \frac{2\pi}{T}t$ =>
$\frac{1}{T_H} = \frac{1}{T_\Pi} - \frac{1}{T}$ => $T_H = \frac{TT_\Pi}{T-T_\Pi} = \frac{87{,}9691\chi58{,}646}{87{,}9691-58{,}646}$ =>

T_H = 175,938 ημέρες

Δηλαδή στον Ερμή έχουμε 88 γήινες ημέρες σκοτάδι και 88 φως.

EXTRA ΑΣΚΗΣΗ ΔΩΡΟ ΓΙΑ ΟΠΟΙΟΝ ΚΑΤΑΦΕΡΕ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΕΙ ΤΗΝ ΠΡΩΤΗ



Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε τον πλανήτη Ερμή να περιφέρεται γύρω από τον ήλιο σε ελλειπτική τροχιά με τον ήλιο στη μία εστία. Η ολική ενέργεια του Ερμή στην τροχιά του είναι ίδια με αυτήν που ο Ερμής κινείται σε κυκλική τροχιά με ακτίνα όσος ο μεγάλος ημιάξονας της ελλειπτικής τροχιάς του α = ΠΚ = ΑΚ.

Α) Δείξτε ότι η ολική ενέργεια του Ερμή δίνεται από την εξίσωση:
$E_{ολ}$ = $-\frac{\boldsymbol{GMm}}{\boldsymbol{2a}}$ όπου Μ η μάζα του ήλιου και m η μάζα του Ερμή. Στη συνέχεια δείξτε ότι η ταχύτητα V του πλανήτη στην τυχαία θέση της ελλειπτικής τροχιάς σε απόσταση r από τον ήλιο δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{V} = \sqrt{\boldsymbol{GM}(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{r}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}})}$$

Β) Η Θέση Π όπου ο πλανήτης βρίσκεται στην πιο κοντινή απόσταση στον ήλιο ονομάζεται περιήλιο της τροχιάς του και η Α όπου ο πλανήτης βρίσκεται στην πιο μακρινή απόσταση από τον ήλιο αφήλιο. Βρείτε την ταχύτητα του Ερμή στο περιήλιο της τροχιάς του αν η απόσταση του περιήλιου από τον ήλιο είναι $r_Π$ = 46.000.000 km. Δίνονται G = 6,67x10^{-11} Nm^2/kg^2, M = 2x10^{30} kg, α = 57.910.000 km.

ΛΥΣΗ

Α) Στην ομαλή κυκλική κίνηση ΣF=$F_{κεντρομόλος}$ => $\frac{GMm}{a^2} = m\frac{υ^2}{α} => υ^2 = \frac{GM}{α}$

$E_{ολ}$ = K + U = $\frac{1}{2}mυ^2 - \frac{GMm}{α} = \frac{GMm}{2α} - \frac{GMm}{α} => E_{ολ} = -\frac{GMm}{2α}$

Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας στην τυχαία θέση της ελλειπτικής τροχιάς του Ερμή:

K + U = $E_{ολ}$ => $\frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a} => \boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{GM}(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{r}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}})}$

Β) $V_Π = \sqrt{\boldsymbol{GM}(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{r_Π}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}})}$ **=> $V_Π$ = 58960,3345 m/s**

ΦΟΒΕΡΉ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΑΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΟΥΜΕ ΟΤΙ ΤΑ ΔΥΟ Voyager χρειάστηκαν τόση περίπου ταχύτητα για να καταφέρουν να βγουν από το ηλιακό σύστημα.