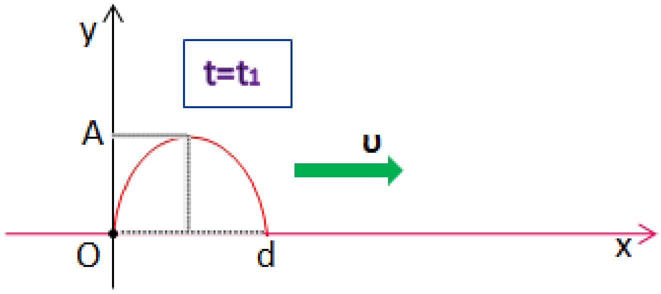
ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΛΜΩΝ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΟΥ ΜΕΤΑΦΕΡΟΥΝ

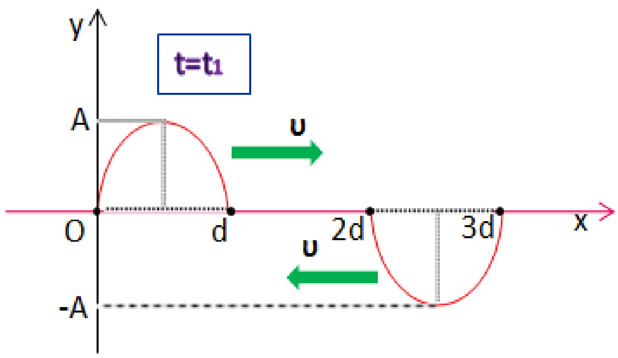
Ένας κυματικός παλμός (σχήμα 1) πλάτους Α και εύρους d διαδίδεται σε τεντωμένη χορδή κατά τη θετική φορά με ταχύτητα υ. Ο παλμός αυτός προκαλεί στην αρχή Ο του συστήματος αναφοράς xOy ταλάντωση με εξίσωση y=Αημωt με $\omega=\frac{2\pi}{T}$ για το χρονικό διάστημα $0 \le t \le \frac{T}{2}$. Στο σχήμα 1 φαίνεται το στιγμιότυπο του παλμού τη στιγμή t_1.



Σχήμα 1

Α. Ποια η χρονική στιγμή $t=t_1$;

Β. Ένας δεύτερος όμοιος παλμός , ανεστραμμένος σε σχέση με τον πρώτο, διαδίδεται στην ίδια χορδή κατά την αντίθετη φορά (σχήμα 2).



Σχήμα 2

Β1 .Σχεδιάστε το στιγμιότυπο των δύο παλμών τη χρονική στιγμή t=T καθώς και αυτό της επαλληλίας τους.

B_2. Ποιο το στιγμιότυπο των δύο παλμών τη στιγμή $t=\frac{3T}{2}$;

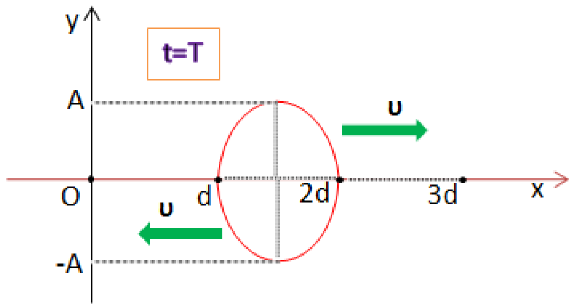
B_3 . Με ποια μορφή εμφανίζεται η ενέργεια που μεταφέρουν οι δύο παλμοί τη στιγμή t=T ;

Γ. Να υπολογίσετε την ενέργεια που μεταφέρει ο αρχικός ο παλμός σε συνάρτηση με τη γραμμική πυκνότητα μ της χορδής, το πλάτος Α, το εύρος d και τη ταχύτητα υ της διάδοσης του .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

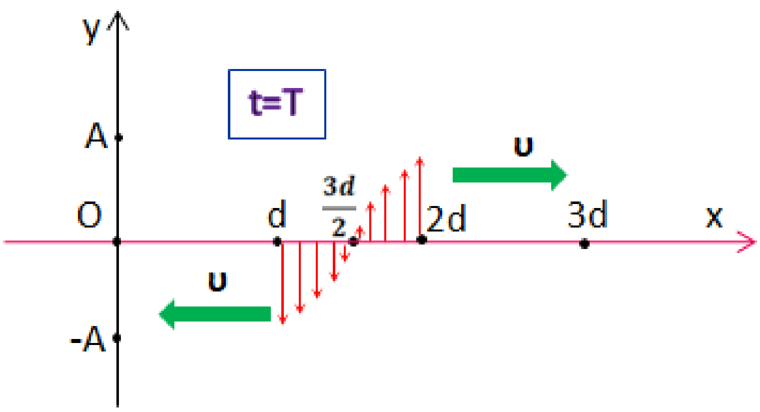
Α. Η χρονική στιγμή είναι η $\mathbf{t_1} = \frac{T}{2}$. Είναι η στιγμή που σταματά να επηρεάζει ο παλμός την αρχή Ο του άξονα x’x που είναι στερεά συνδεδεμένος με τη χορδή όταν ηρεμεί .

Β. **Β$_1$.** Τη στιγμή t=T οι δύο παλμοί επηρεάζουν την ίδια περιοχή $[d, 2d]$ (σχήμα 3) .



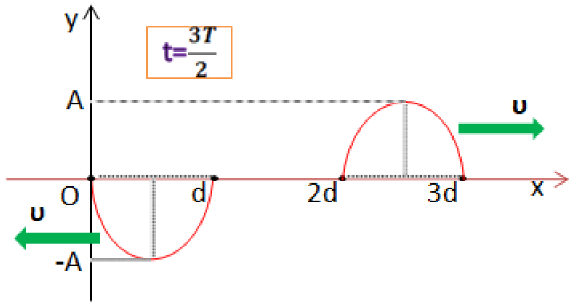
Σχήμα 3

Αν y_1 η απομάκρυνση κάποιου σημείου της χορδής στη παραπάνω περιοχή εξαιτίας του παλμού (1) και y_2 η απομάκρυνση του ίδιου σημείου εξαιτίας του παλμού (2) τη στιγμή t=T , τότε προφανώς είναι $y_1 = - y_2$ (σχήμα 3) οπότε σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας : $y=y_1 + y_2 =0$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το τμήμα αυτό της χορδής στιγμιαία να έχει την εικόνα της όταν είναι σε ηρεμία. (σχήμα 4).



Σχήμα 4

Β₂. Αμέσως μετά τη στιγμή t=T οι δύο παλμοί αρχίζουν να «αναδύονται» και τη στιγμή t=$\frac{3T}{4}$ το στιγμιότυπό τους φαίνεται στο σχήμα 5 έχοντας τη μορφή που είχαν πριν τη συμβολή τους.



Σχήμα 5

Β₃. Η ενέργεια των διάφορων υλικών σημείων της χορδής όταν επηρεάζονται από τον κάθε παλμό, εναλλάσσεται μεταξύ δυναμικής και κινητικής . Επειδή τη στιγμή t=T η χορδή δεν είναι παραμορφωμένη (σχήμα 4) , η ενέργεια που μεταφέρουν οι κυματικοί παλμοί εμφανίζεται με τη μορφή της κινητικής ενέργειας. Τα κόκκινα βελάκια στο σχήμα 4 δείχνουν τα διανύσματα των ταχυτήτων των διάφορων υλικών σημείων της χορδής τη στιγμή t=T (δείτε τη μαθηματική περιγραφή που ακολουθεί).

Γ. Έστω ένα στοιχειώδες τμήμα της χορδής μήκους dx_i και μάζας dm_i=μ dx_i . Έστω dE_i η ενέργεια που μεταφέρει ο παλμός σε αυτό το τμήμα . Τότε :

$dE_i = dK_{i,max} = \frac{1}{2}\,dm\,\upsilon_{i,max}^2 = \frac{1}{2}\,\mu\,dx_i\,\omega^2 A^2$ ή $dE_i = \frac{2\pi^2}{T^2}\,\mu\,A^2\,dx_i$. Η ζητούμενη ενέργεια Ε θα είναι: $E = \sum dE_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{2\pi^2}{T^2}\,\mu A^2 dx_i = \frac{2\pi^2}{T^2}\,\mu A^2\sum_{i=1}^{n} dx_i$ ή $\mathbf{E} = \boldsymbol{\frac{2\pi^2}{T^2}\,\mu A^2 d}$. Όμως $\upsilon = \frac{d}{\frac{T}{2}}$ ή $T = \frac{2d}{\upsilon}$ και τελικά : $\mathbf{E} = \boldsymbol{\frac{\pi^2\mu\upsilon^2 A^2}{2d}}$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Η κυματική εξίσωση του αρχικού κυματικού παλμού είναι:

$y_1 = A\eta\mu\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{2d}\right)$ (α).

Για τον 2ο παλμό : Η αρχή Ο του συστήματος αναφοράς ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση $y_{2,(O)} = A\eta\mu\omega(t - \frac{3T}{2})$ καθώς όπως προκύπτει από το σχήμα 5 τη χρονική στιγμή t=$\frac{3T}{2}$ αρχίζει να επηρεάζει ο 2ος κυματικός παλμός το Ο .

Οπότε: $y_{2,(O)}$ =Αημ(ωt – 3π) και σύμφωνα με τη διαδικασία παραγωγής της εξίσωσης του αρμονικού κύματος θα είναι:

y_2=Αημ$\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{2d}\right)-3\pi\right]$ ή y_2= - Αημ $2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{2d}\right)$ (β) . Σύμφωνα με την Αρχή της επαλληλίας $y=y_1+y_2$ και τις (α) και (β) παίρνουμε:

***y*= 2Ασυν**$\left(\frac{\pi x}{d}\right)$ **ημ**$\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ **(γ)** και για την ταχύτητα των διαφόρων υλικών σημείων της χορδής έχουμε **υ=**$\frac{dy}{dt}$ **= 2Αωσυν**$\left(\frac{\pi x}{d}\right)$ **συν**$\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ **(δ).** Για t=T η

(γ) δίνει **y=0 για όλα τα σημεία της χορδής** και η (δ) **υ= 2Αωσυν**$\left(\frac{\pi x}{d}\right)$ **(ε)** σε πλήρη συμφωνία με τα σχήματα 3 και 4**. Η ενέργεια που μεταφέρουν οι δύο παλμοί τη στιγμή αυτή (t=T) , είναι μόνο κινητική**! Αυτό βοηθά στον υπολογισμό της ενέργειας που μεταφέρει ο κάθε κυματικός παλμός, διαφορετικά:

Υπολογίζουμε την ενέργεια που μεταφέρουν οι δύο παλμοί. Τη στιγμή t=T έστω ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους dx_i της χορδής μάζας $dm_i=\mu dx_i$ στην περιοχή $d\le x\le 2d$ και dE_i η ενέργεια που του έχει μεταφερθεί από τους κυματικούς παλμούς. Θα είναι $dE_i = dK_i$ όπου dK_i είναι η κινητική ενέργειά του όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του και η χορδή στιγμιαία ευθυγραμμίζεται (σχήματα 3 και 4). Θα είναι τότε:

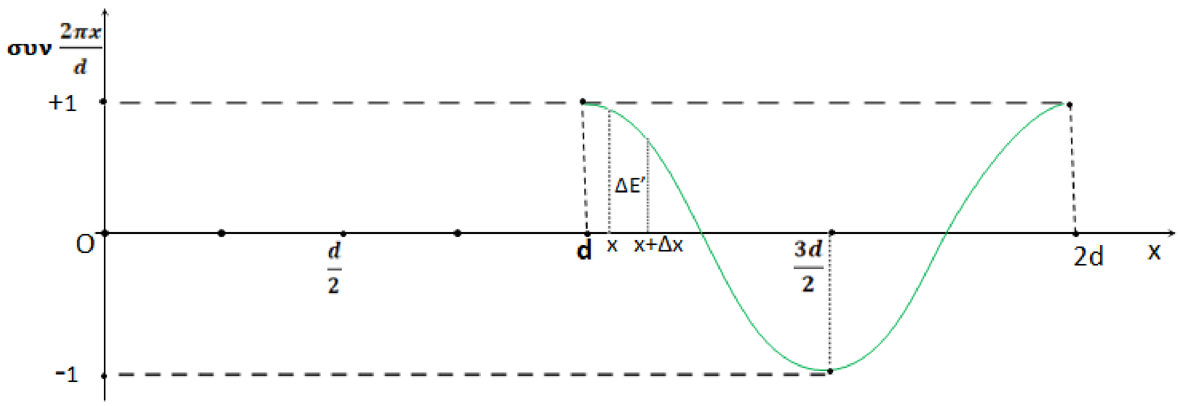
$dE_i = dK_i = \frac{1}{2}dm_i\upsilon_i^2$ και λόγω της (ε) $dE_i = \frac{1}{2}\mu dx_i 4A^2\omega^2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{d}\right)$, ή

$dE_i=2\mu\omega^2A^2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{d}\right)\ dx_i$. Η ενέργεια **Ε** που μεταφέρουν και οι δύο παλμοί είναι:

Ε= $\sum_{i=1}^{n} dEi = \sum_{i=1}^{n}\left[2\mu\omega^2A^2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{d}\right)dx_i\right] = 2\mu\omega^2A^2\sum_{i=1}^{n}\left[\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{d}\right)dx_i\right] =$

$2\mu\omega^2A^2\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{d}\right)}{2}dx_i\right] =$

$= \mu\omega^2A^2\sum_{i=1}^{n}dx_i + \mu\omega^2A^2\sum_{i=1}^{n}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{d}\right)dx_i\right]$ Όμως $\sum_{i=1}^{n}dx_i = d$



Σχήμα 6

και επειδή $\Delta E' = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{d}\right)\Delta x$ τότε το άθροισμα :

$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \Delta \mathrm{E}'_i \;= \sum_{i=1}^{n} \left[\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi \mathrm{x}}{d}) \mathrm{dx_i} \right]$ στην περιοχή d≤x≤2d

θα εκφράζει το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi\mathrm{x}}{\mathrm{d}}\right) - \mathrm{x}$ και τον ημιάξονα Ox (σχήμα 6) . Οπότε θα είναι $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \left[\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi\mathrm{x}}{\mathrm{d}}) \mathrm{dx_i} \right]$ =0 γιατί είναι μηδέν το αντίστοιχο εμβαδό , οπότε : E= $\mu\omega^2 \mathrm{A}^2$ d ή $\boldsymbol{\mathrm{E}=\frac{\pi^2 \mu\upsilon^2 A^2}{d}}$**.** Είναι διπλάσια της ενέργειας που μεταφέρει ο ένας παλμός! Σε πλήρη συμφωνία με τον προηγούμενο υπολογισμό! Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει και με ολοκληρωτικό λογισμό.