

Όνοματεπώνυμο:.....

(προσομοίωση)	ΒΑΘΜΟΣ	A1:	A2:	A3:	A4:	A5:	<b>A :</b>
		B1:	B2:	B3:			<b>B:</b>
		Γ1:	Γ2:	Γ3:	Γ4:		<b>Γ:</b>
		Δ1:	Δ2:	Δ3:	Δ4:		<b>Δ:</b>
							<b>ΣΥΝΟΛΟ:</b>

**ΘΕΜΑ Α**

Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό καθεμιάς από τις παρακάτω προτάσεις,  $A_1-A_4$ , και δίπλα της το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

**A<sub>1</sub>.** Μια σφαίρα κινείται με ταχύτητα που δεν διέρχεται από το κέντρο μιας άλλης ακίνητης και συγκρούεται μ' αυτήν. Τότε η κρούση τους ονομάζεται :

α) πλάγια β) κεντρική γ) έκκεντρη δ) πλαστική

**Μονάδες 5**

**A<sub>2</sub>:** Από την ταράτσα πολυκατοικίας αφήνουμε να κάνει ελεύθερη πτώση μια ηχητική πηγή, που παράγει ήχο συχνότητας  $f_s$ . Η συχνότητα του ήχου που ακούμε κατά τη διάρκεια της πτώσης

α) έχει σταθερή τιμή μικρότερη της  $f_s$

β) αυξάνεται διαρκώς

γ) μειώνεται διαρκώς

δ) στην αρχή μειώνεται και κάποια στιγμή σταθεροποιείται

**Μονάδες****5**

**A<sub>3</sub>.** Σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και η ολική ενέργεια ταλάντωσης είναι  $E$ . Σε κάποια θέση απομάκρυνσης  $x$ , συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλο σώμα  $B$ , με αποτέλεσμα η ενέργεια της ταλάντωσης του  $A$  να μηδενισθεί. Τότε

α) Η θέση  $x$  που έγινε η κρούση είναι η θέση ισορροπίας ( $x=0$ ) και ισχύουν:  $m_A=m_B$  και το σώμα  $B$  ήταν αρχικά ακίνητο.

β) Η θέση  $x$  που έγινε η κρούση είναι  $x=\pm A$  και ισχύει  $m_A=m_B$

γ) Η θέση  $x$  που έγινε η κρούση είναι  $x=0$  και ισχύει  $m_A \gg m_B$

δ) Η θέση  $x$  που έγινε η κρούση είναι  $x=\pm A$  και ισχύει  $m_A \ll m_B$

**Μονάδες 5**

**A<sub>4</sub>.** Σε μια χορδή, της οποίας το ένα άκρο είναι σταθερά στερεωμένα, ενώ το άλλο είναι κοιλία, έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Το μήκος της χορδής είναι ίσο με  $L$ . Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 3 σημεία συνολικά που είναι διαρκώς ακίνητα.

Αν  $f$  η συχνότητα ταλάντωσης της χορδής, τότε η ταχύτητα  $u$  διάδοσης του κύματος στη χορδή είναι:

**α.**  $u = 1,5Lf$  **β.**  $u = 0,4Lf$  **γ.**  $u = 0,8Lf$  **δ.**  $u = \frac{4}{9}Lf$

**Μονάδες****5**

**A<sub>5</sub>.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστή, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Σε μια φθίνουσα ταλάντωση σώματος, κρεμασμένου από κατακόρυφο ελατήριο, η περίοδος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο .

**β.** Σε κύκλωμα πηνίου-πυκνωτή- αντίστασης, που τροφοδοτείται από πηγή αρμονικής εναλλασσόμενης τάσης, η μέγιστη τιμή του πλάτους της έντασης του ρεύματος κατά τον συντονισμό, είναι αντιστρόφως ανάλογη της τιμής της αντίστασης.

**γ.** Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα της ακτινοβολίας γ παράγονται όταν η υπεριώδης ακτινοβολία που προέρχεται από τον Ήλιο, απορροφάται από το όζον της ατμόσφαιρας.

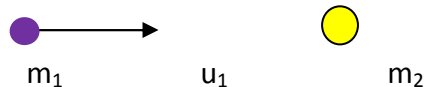
**δ.** Η ενέργεια ταλάντωσης ιδανικού κυκλώματος LC που αρχίζει να ταλαντώνεται με φορτισμένο τον πυκνωτή σε αρχική τάση  $V$  , είναι ανεξάρτητη από τον συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου.

**ε.** Το μέτρο της ιδιοπεριστροφής(spin) των υποατομικών σωματίων, όπως ηλεκτρονίων, πρωτονίων, νετρονίων έχει πάντα την ίδια τιμή.

**Μονάδες 5**

**Θέμα Β**

**B1:**



Σώμα μάζας  $m_1$  κινείται με ταχύτητα  $u_1$  και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας  $m_2$ . Το ποσοστό % της ορμής, που μεταφέρεται από το  $m_1$  στο  $m_2$  κατά την κρούση, είναι μεγαλύτερο, αν

α. η ορμή του  $m_1$  έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη τιμή

β. ο λόγος  $\frac{m_1}{m_2}$  έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη τιμή

γ. ο λόγος  $\frac{m_1}{m_2}$  έχει όσο το δυνατόν μικρότερη τιμή.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες: 2+6=8**

**B2 :** Δυο πηγές  $\Pi_1, \Pi_2$  ξεκινούν να ταλαντώνονται ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή  $t_0=0$  δημιουργώντας αρμονικά κύματα στη επιφάνεια υγρού, με ίδιο πλάτος  $A=2\text{cm}$  και συχνότητες  $f_1= 2\text{Hz}$   $f_2=2,1\text{Hz}$  αντίστοιχα. Ένα κομμάτι φελλού βρίσκεται στο μέσο  $M$  της απόστασης  $d=2\text{m}$  των πηγών  $\Pi_1\Pi_2$  και επιπλέει. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του φελλού από τη θέση ισορροπίας του, σε βαθμολογημένους άξονες, αν ο φελλός άρχισε να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή  $t_0=2\text{s}$ .

**Μονάδες 2+6=8**

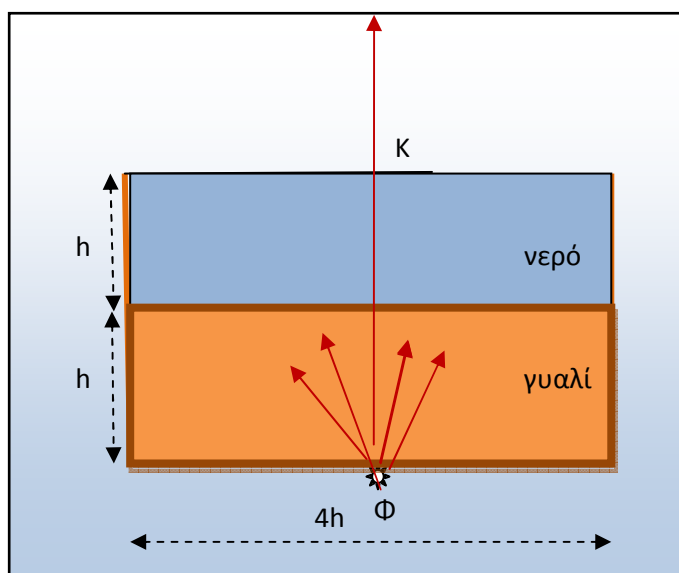
**B3:**

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται δοχείο που ο πυθμένας του είναι από γυαλί και το άλλο μισό γεμάτο με νερό, ύψους  $h$  το καθένα. Στο κέντρο του πυθμένα και μέσα στο γυαλί, υπάρχει φωτεινή μονοχρωματική πηγή  $\Phi$  που ρίχνει το φως μόνο προς την επιφάνεια του νερού. Στα πλευρικά τοιχώματα δεν γίνονται ανακλάσεις. Στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού σχηματίζεται φωτεινός κύκλος ακτίνας  $R$  που είναι: **α)**  $R = \frac{h}{n_\gamma} + \frac{h}{n_\nu}$  **β)**

**γ)**  $R = \frac{2h}{\sqrt{n_\gamma^2 + n_\nu^2}}$  όπου  $n_\gamma, n_\nu$  οι δείκτες διάθλασης του γυαλιού και του νερού

αντίστοιχα. Δικαιολογήστε την επιλογή σας

**Μονάδες 2+7=9**



**ΘΕΜΑ Γ:** Σώμα μάζας  $m_1=1\text{kg}$  τοποθετείται τη χρονική στιγμή  $t_0=0$  πάνω σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς  $k=100\text{N/m}$ , που έχει το κάτω άκρο του στερεωμένο στο δάπεδο και έχει φυσικό μήκος  $l_0=1,2\text{m}$ . Όταν επιστρέψει το σώμα στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου για πρώτη φορά, τοποθετείται ακαριαία πάνω του, άλλο σώμα μάζας  $m_2=3\text{kg}$ . Όταν το σύστημα επιστρέψει στη θέση φυσικού μήκους για πρώτη φορά, αποσπάμε το δεύτερο σώμα  $m_2$ , και το κρατάμε εκεί, ενώ το  $m_1$  συνεχίζει να ταλαντώνεται. Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

1. Βρείτε τη χρονική στιγμή  $t_1$  που τοποθετήσαμε και τη χρονική στιγμή  $t_2$  που αποσπάσαμε το  $m_2$ .  
μονάδες 8
2. Ποια η ελάχιστη απόσταση από το έδαφος που πλησίασε μόνο του το  $m_1$ , και ποια όταν ήταν μαζί με το  $m_2$ .  
μονάδες 6
3. Πόση δύναμη δέχεται το  $m_1$  από το  $m_2$  σε ύψος  $1\text{m}$  από το έδαφος. Τι ταχύτητα έχουν σε αυτή τη θέση;  
μονάδες 6
4. Ποια χρονική στιγμή  $t_3$  πρέπει να αφήσουμε το  $m_2$ , ώστε να συγκρουσθεί με το  $m_1$  κεντρικά ελαστικά, όταν αυτό περνά από τη θέση ισορροπίας του ανερχόμενο για πρώτη φορά.  
Ποια θα είναι η ταχύτητα καθενός αμέσως μετά την κρούση;  
μονάδες 5

**ΘΕΜΑ Δ:** Σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσης  $\phi$ , ( $\eta\mu\phi=0,6$   $\sigma\upsilon\nu\phi=0,8$ ), τοποθετούμε κύλινδρο μικρού ύψους ( $h=R/5$ ) με τη κυκλική βάση του στο κεκλιμένο επίπεδο, και παρατηρούμε ότι, μόλις που αρχίζει να ολισθαίνει. Κατόπιν τον αφήνουμε να κυλήσει, κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου μήκους  $d=1\text{m}$ . Η μάζα του είναι  $m=1\text{kg}$ , η ακτίνα του  $R=0,1\text{m}$  και η ροπή αδράνειας  $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$ , ενώ όλες οι επιφάνειές του έχουν τον ίδιο συντελεστή τριβής  $\mu$  και ισχύει  $\mu_{ολίσθησης} = \mu_{οριακό,στατική} = \mu$ . Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

1. Να αποδείξετε ότι ο κύλινδρος κυλάει (χωρίς ολίσθηση) και μετά να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του, καθώς και τη γωνιακή του επιτάχυνση.  
μονάδες 6
2. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ορμής του καθώς και το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του ως προς το κέντρο μάζας του, στη διάρκεια της καθόδου.  
μονάδες 6
3. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια που απέκτησε λόγω περιστροφής στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.  
μονάδες 6
4. Όταν φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου συνεχίζει να κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει τον ίδιο συντελεστή τριβής, και αμέσως μετά, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη

σφαίρα ίδιας ακτίνας και μάζας, η οποία έχει τον ίδιο συντελεστή τριβής με το δάπεδο. Κατά την κρούση των στερεών δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ τους.

Δείξτε ότι η κίνηση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου θα είναι για λίγο χρονικό διάστημα, ομαλά επιταχυνόμενη, μετά την κρούση του με τη σφαίρα, της οποίας το κέντρο μάζας της θα κάνει για λίγο χρονικό διάστημα, ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Υπολογίστε τις επιταχύνσεις των κέντρων μάζας των σωμάτων.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας  $I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2$

μονάδες 7

**\*\* (προαιρετικό): Υπολογίστε τις ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων, ένα δευτερόλεπτο μετά την ακαριαία κρούση τους.**

Νέα Σμύρνη 9 Μαΐου 2014

### Καλή επιτυχία

Κορκίζογλου Πρόδρομος

[prodkork@hotmail.com](mailto:prodkork@hotmail.com)

7<sup>ο</sup> Γ.ΕΛ. Ν. Σμύρνης

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

ΘΕΜΑ Α:

**A1:  $\gamma$**

$$\mathbf{A2: } \gamma, f_A = \frac{u_{\eta\chi}}{u_{\eta\chi} + gt} \nearrow$$

**A3:  $\alpha$**

$$\mathbf{A4: } \gamma \quad L = \lambda + \frac{\lambda}{4} = \frac{5\lambda}{4} \rightarrow \lambda = \frac{4L}{5} = 0,8L \rightarrow u = \lambda f = 0,8Lf$$

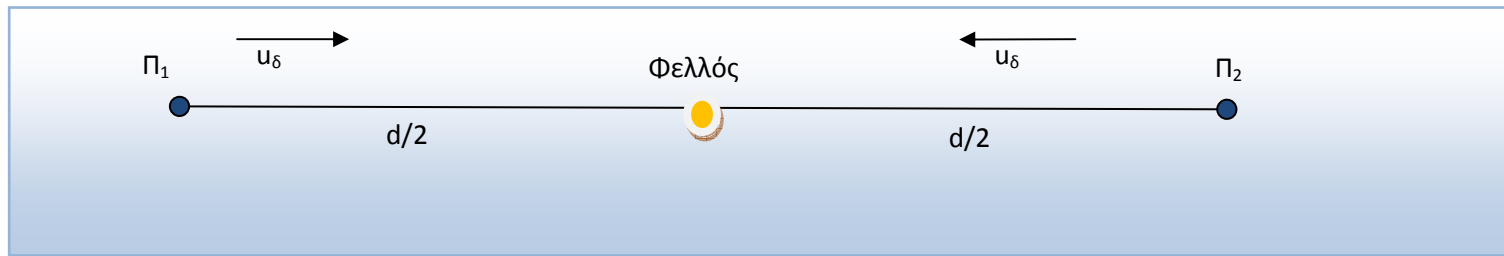
A5: ΛΣΛΣΣ

ΘΕΜΑ Β: Β1:  $\gamma \quad u'_2 = \frac{2m_1u_1}{m_1+m_2}$ , άρα  $\Delta p_2 = p'_2 - p_2 = m_2u'_2 - 0 = \frac{2m_1m_2u_1}{m_1+m_2}$

$$\text{ποσοστό\%} = \frac{\Delta p_2}{p_1} 100\% = \frac{\frac{2m_1m_2u_1}{m_1+m_2}}{m_1u_1} 100\% = \frac{200}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \%$$

Από εδώ βλέπουμε ότι όσο μικρότερος είναι ο λόγος  $\frac{m_1}{m_2}$  τόσο πιο μεγάλο είναι το ποσοστό % της ορμής που μεταβιβάζεται στο ακίνητο σώμα  $m_2$ .

B2:



Το κάθε κύμα θα κάνει τον ίδιο χρόνο για να φτάσει στη θέση του φελλού, άρα η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στην επιφάνεια του νερού είναι

$$u_{\delta} = \frac{d}{t_{\phi}} = 0,5 \text{ m/s} \quad \text{άρα το μήκος κύματος του κάθε κύματος είναι:}$$

$$\lambda_1 = \frac{u_{\delta}}{f_1} = \frac{0,5}{2} = 0,25 \text{ m}, \quad \lambda_2 = \frac{u_{\delta}}{f_2} = \frac{0,5}{2,1} = \frac{5}{21} \text{ m}$$

και η εξίσωση του κάθε κύματος:  $y_1 = A \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1} \right) = 2 \cdot 10^{-2} \eta \mu 2\pi (2t - 4x)$ ,

$$y_2 = A \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2} \right) = 2 \cdot 10^{-2} \eta \mu 2\pi (2,1t - 4,2x) \quad \text{s.l.}$$

Ισχύει η αρχή της επαλληλίας για την ταλάντωση του φελλού για  $x=d/2=1\text{m}$ , άρα

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot 10^{-2} \eta \mu 2\pi (2t - 4) + 2 \cdot 10^{-2} \eta \mu 2\pi (2,1t - 4,2) = \\ = 4 \cdot 10^{-2} \sigma \nu \nu 2\pi \frac{(2,1t - 4,2 - 2t + 4)}{2} \eta \mu 2\pi \frac{2t - 4 + 2,1t - 4,2}{2} = 4 \cdot 10^{-2} \cdot \sigma \nu \nu \frac{\pi}{10} (t - 2) \cdot \eta \mu 2\pi (2,05t - 4,1) \text{ s. i.}$$

Ο όρος  $\sigma \nu \nu \frac{\pi}{10} (t - 2)$  μεταβάλλεται πολύ πιο αργά από τον όρο  $\eta \mu 2\pi (2,05t - 4,1)$  κι έτσι η έκφραση

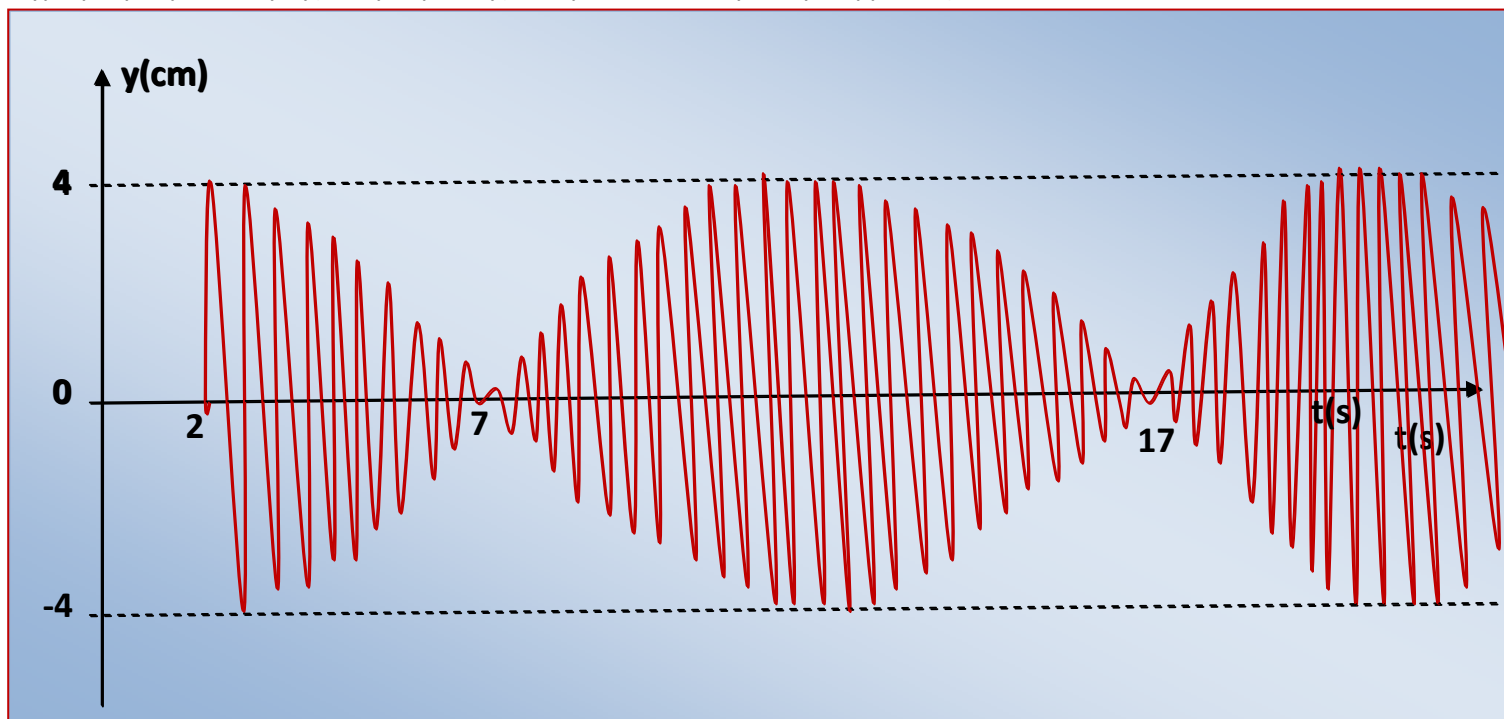
$4 \cdot 10^{-2} \cdot \sigma \nu \nu \frac{\pi}{10} (t - 2)$  θα μπορούσε να θεωρηθεί "πλάτος" για μικρά χρονικά διαστήματα, συγκρίσιμα με την περίοδο της ταλάντωσης. Προκύπτουν λοιπόν "διακροτήματα" για την κίνηση οποιουδήποτε σημείου της επιφάνειας του υγρού, μετά τη συμβολή των κυμάτων, δηλαδή το "πλάτος" θα μεταβάλλεται περιοδικά μεταξύ των τιμών 0 και  $4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ .

Για πρώτη φορά θα μηδενισθεί όταν  $\sigma \nu \nu \frac{\pi}{10} (t - 2) = 0 \rightarrow \frac{\pi}{10} (t_1 - 2) = \frac{\pi}{2} \rightarrow t_1 = 7 \text{ s}$  και για δεύτερη φορά

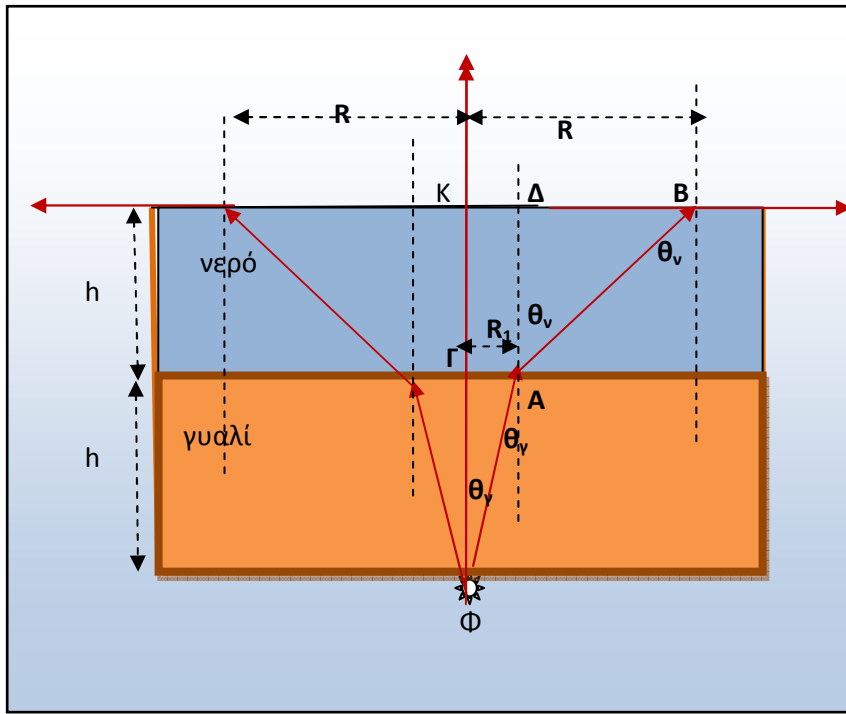
όταν  $\sigma \nu \nu \frac{\pi}{10} (t_2 - 2) = 0 \rightarrow \frac{\pi}{10} (t_2 - 2) = \frac{3\pi}{2} \rightarrow t_2 = 17 \text{ s}$  άρα η περίοδος του διακροτήματος θα είναι  $T_{\delta} = 17 - 7 = 10 \text{ s}$  και η συχνότητα της ιδιόμορφης μη αρμονικής ταλάντωσης του φελλού θα είναι  $f_{\tau} = 2,05 \text{ Hz}$  και περίοδο  $T_{\tau} = 1/f_{\tau} = 1/2,05 \text{ s}$

Στο χρονικό διάστημα των  $T_{\delta} = 10 \text{ s}$  ο φελλός θα κάνει  $N = T_{\delta} / T_{\tau} = 10 \cdot 2,05 = 20,5$  πλήρεις ταλαντώσεις.

Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του φελλού από τη θέση ισορροπίας του θα είναι:



B3:



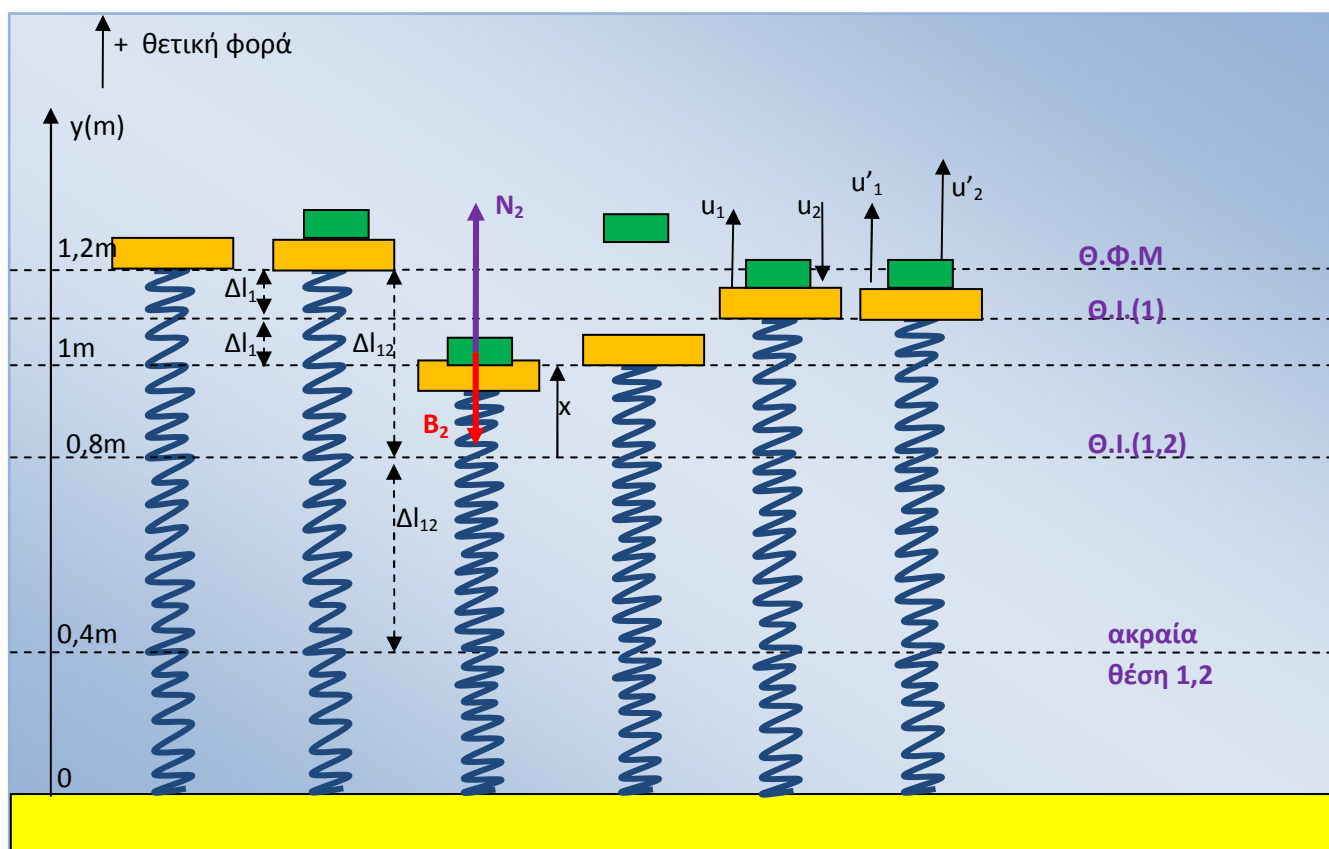
Είναι για το B:  $n_v \cdot \eta\mu\theta_v = n_{\alpha\epsilon\rho\alpha} \cdot \eta\mu 90^\circ \rightarrow \eta\mu\theta_v = \frac{1}{n_v}$

ομοίως Snell για το A:  $n_\gamma \cdot \eta\mu\theta_\gamma = n_v \cdot \eta\mu\theta_v \rightarrow \eta\mu\theta_\gamma = \frac{1}{n_\gamma}$

Στο τρίγωνο ΦΑΓ:  $\eta\mu\theta_\gamma = \frac{A\Gamma}{A\Phi} = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + h^2}} = \frac{1}{n_\gamma} \rightarrow R_1 = \frac{h}{\sqrt{n_\gamma^2 - 1}}$

Στο τρίγωνο ΑΔΒ:  $\eta\mu\theta_v = \frac{\Delta B}{AB} = \frac{R - R_1}{\sqrt{(R - R_1)^2 + h^2}} = \frac{1}{n_v} \rightarrow R - R_1 = \frac{h}{\sqrt{n_v^2 - 1}} \rightarrow R = \frac{h}{\sqrt{n_\gamma^2 - 1}} + \frac{h}{\sqrt{n_v^2 - 1}}$

ΘΕΜΑ Γ:



1. Θέση ισορροπίας  $m_1$  :  $\Sigma F=0$  ,  $F_{ελ.1}=B_1$  ,  $k \cdot \Delta l_1=m_1 g$  ,  $\Delta l_1=0,1m=A_1$

Θέση ισορροπίας  $m_1, m_2$  :  $\Sigma F=0$  ,  $F_{ελ.1,2}=B_1+B_2$  ,  $k \cdot \Delta l_{1,2}=m_1 g+m_2 g$  ,  $\Delta l_{1,2}=0,4m=A_{1,2}$

περίοδος  $m_1$ :  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} = \frac{2\pi}{10} s$  , περίοδος  $m_1+m_2$ :  $T_{1,2} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}} = \frac{4\pi}{10} s$

χρονική στιγμή τοποθέτησης  $m_2$  :  $t_1=T_1=\frac{2\pi}{10} s$

χρονική στιγμή απόσπασης  $m_2$  :  $t_2=t_1+T_{1,2}=\frac{2\pi}{10} s + \frac{4\pi}{10} s = \frac{6\pi}{10} s$

2.  $h_{1, \min} = l_0 - 2A_1 = 1,2m - 0,2m = 1m$  ,  $h_{1,2 \min} = l_0 - 2A_{1,2} = 1,2m - 0,8m = 0,4m$

3. Σε ύψος 1,2m από το έδαφος, η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του συστήματος 1,2 είναι  $x=0,2m$

Το σώμα  $m_2$  κάνει α.α.τ. μαζί με το  $m_1$ , άρα  $\Sigma F_2=m_2 a$  ,  $N_2 - m_2 g = -m_2 \omega^2 x$  ,  $N_2 = m_2 g - m_2 \omega^2 x$  όμως

$\omega = 2\pi/T_{1,2} = 5 \text{ rad/s}$  άρα  $N_2 = 30 - 3 \cdot 25 \cdot 0,2 = 15N$

Α.Δ.Ε.Τ.  $E=K+U$  ,  $\frac{1}{2} k A_{1,2}^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 \rightarrow u = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2} (A_{1,2}^2 - x^2)} = \sqrt{25(0,4^2 - 0,2^2)}$

$u = \sqrt{3} m/s$

4. Το χρονικό διάστημα που πρέπει να περάσει για να βρεθεί το σώμα 1 στη θέση ισορροπίας του είναι

$\Delta t_1 = 3T_1/4 = \frac{3 \cdot 2\pi}{4 \cdot 10} = \frac{3\pi}{20}$ . Το χρονικό διάστημα ελεύθερης πτώσης του 2 είναι  $\Delta t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot A_1}{g}} = \sqrt{\frac{0,2}{10}} = \frac{\sqrt{2}}{10} s$

Άρα η χρονική στιγμή που ζητάμε είναι:  $t_3 = t_2 + (\Delta t_1 - \Delta t_2) = \frac{6\pi}{10} + \frac{3\pi}{20} - \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{15\pi - 2\sqrt{2}}{20} s$

Οι ταχύτητές τους είναι:  $u_1 = \omega_1 A_1 = \frac{2\pi}{T_1} \cdot A_1 = 1 \frac{m}{s}$  ,  $u_2 = -g \Delta t_2 = -\sqrt{2} m/s$

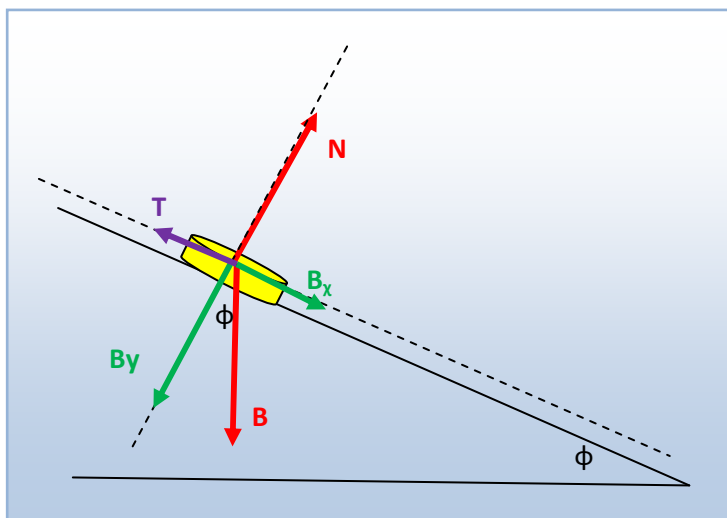
Μετά την κρούση τους οι ταχύτητές τους είναι:

$$u'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 = \frac{1-3}{4} \cdot 1 + \frac{2 \cdot 3}{4} \cdot (-\sqrt{2}) = -\frac{1+3\sqrt{2}}{2} = -2,62 m/s$$



$$u'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{3-1}{4} \cdot (-\sqrt{2}) + \frac{2 \cdot 1}{4} \cdot 1 = -\frac{\sqrt{2}-1}{2} = -0,2\text{m/s}$$

ΘΕΜΑ Δ:

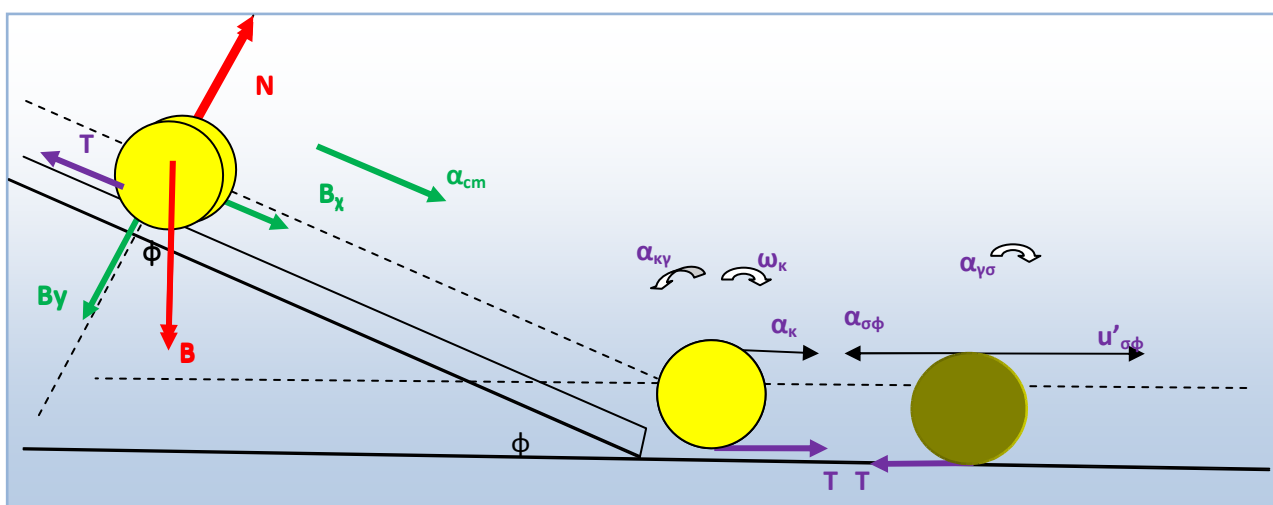


1. Όταν τοποθετήσουμε τον κύλινδρο με τη βάση του στο κεκλιμένο επίπεδο, αυτός μόλις που αρχίζει να κινείται, άρα η τριβή είναι στατική οριακή και ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0, B_x = T, m g \eta \mu \phi = \mu_{op} N$$

$$\Sigma F_y = 0, N = B_y = m g \sigma \nu \nu \phi \quad \text{άρα}$$

$$m g \eta \mu \phi = \mu_{op} m g \sigma \nu \nu \phi \quad \text{ή} \quad \mu_{op} = \frac{\eta \mu \phi}{\sigma \nu \nu \phi} = \frac{0,6}{0,8} = \mu = 0,75$$



έστω ότι ο κύλινδρος κυλάει. Τότε θα ισχύει:  $a_{cm} = \alpha_{\gamma} R$ ,  $\Sigma F_x = m a_{cm}$ , ή  $B_x - T_s = m a_{cm}$

$$\text{και } \Sigma \tau_{cm} = I_{cm} \alpha_{\gamma} \quad \text{ή} \quad T_s R = \frac{1}{2} m R^2 \alpha_{\gamma} \rightarrow T_s = \frac{1}{2} m a_{cm} \quad \text{έτσι} \quad m g \eta \mu \phi - \frac{1}{2} m a_{cm} = m a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{2 g \eta \mu \phi}{3}$$

$$T_s = \frac{m g \eta \mu \phi}{3} \leq T_{op} = \mu_{op} m g \sigma \nu \nu \phi \rightarrow \frac{\eta \mu \phi}{3 \sigma \nu \nu \phi} \leq \frac{\eta \mu \phi}{\sigma \nu \nu \phi} \rightarrow \frac{1}{3} < 1 \text{ ισχύει}$$

άρα η υπόθεσή μας είναι σωστή, κι έτσι  $a_{cm} = \frac{2 g \eta \mu \phi}{3} = \frac{12}{3} = 4\text{m/s}^2$   $\alpha_{\gamma} = \frac{a_{cm}}{R} = 40\text{r/s}^2$

2. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι:  $\frac{dp}{dt} = \Sigma F = m a_{cm} = 4\text{N}$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι:  $(\frac{dL}{dt})_{cm} = \Sigma \tau_{cm} = I_{cm} \alpha_{\gamma} = \frac{1}{2} m R^2 \alpha_{\gamma} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,01 \cdot 40 = 0,2\text{Nm}$

3. Εφαρμόζουμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας κι έχουμε:  $E_{μηχ.αρχ.} = E_{μηχ.τελ.}$  με επίπεδο αναφοράς το δυναμικής ενέργειας το χαμηλότερο, έτσι  $m g h = \frac{1}{2} m u_{cm}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$  ή επειδή  $u_{cm} = \omega R$

$$m g x_{cm} \eta \mu \phi = \frac{1}{2} m u_{cm}^2 + \frac{1}{2} m u_{cm}^2 \rightarrow u_{cm} = \sqrt{\frac{4 g x_{cm} \eta \mu \phi}{3}} = \sqrt{\frac{24}{3}} = 2\sqrt{2}\text{m/s}$$

Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής είναι  $K_{\text{σπ.}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 = \frac{1}{4} m u_{cm}^2 = 2 J$

4. **Ο κύλινδρος** μετά την κεντρική ελαστική κρούση του με την ακίνητη σφαίρα, ακινητοποιείται μεταφορικά, όχι όμως στροφικά, γιατί δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ τους. Έτσι η **τριβή** που θα ασκηθεί πάνω του είναι **ολίσθησης** με φορά προς τα δεξιά και θα τον **επιταχύνει μεταφορικά** ενώ θα τον **επιβραδύνει στροφικά**.

αντίθετα η **σφαίρα**, απέκτησε μεταφορική ταχύτητα  $u_{cm} = 2\sqrt{2} m/s$  και έχει  $\omega_{\sigma} = 0$ , άρα θα ασκηθεί **τριβή ολίσθησης** προς τα αριστερά που θα την **επιβραδύνει μεταφορικά** και θα την **επιταχύνει στροφικά**, μέχρι και τα δυο στερεά να κυλάνε χωρίς ολίσθηση. Έτσι έχουμε:

$$T = m a_{cm} \rightarrow \mu m g = m a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \mu g = 7,5 m/s^2$$

**ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ:** Η αρχική γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου πριν την κρούση είναι

$$\omega = \frac{u_{cm}}{R} = \frac{2\sqrt{2}}{0,1} = 20\sqrt{2} r/s.$$

Η κύλιση θα αρχίσει για κάθε στερεό όταν  $u_{cm} = \omega R$

κύλινδρος:  $\Sigma \tau = I_{cm} \alpha_{\gamma}$ ,  $TR = (1/2)mR^2 \alpha_{\gamma}$ ,  $\mu mgR = (1/2)mR^2 \alpha_{\gamma}$ ,  $\alpha_{\gamma} = 2\mu g/R = 2,0,75 \cdot 10/0,1 = 150 r/s^2$

$$u_{cm} = \omega R \text{ ή } \alpha_{cm} t_1 = (\omega - \alpha_{\gamma} t_1) R, t_1 = \frac{\omega R}{a_{cm} + \alpha_{\gamma} R} = \frac{20\sqrt{2} \cdot 0,1}{7,5 + 15} = \frac{2\sqrt{2}}{22,5} s = 0,125 s \text{ άρα}$$

$$u_{cm} = \alpha_{cm} t_1 = 7,5 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{22,5} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,942 m/s \text{ και } x_{cm1} = \frac{1}{2} \alpha_{cm} t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 0,125^2 = 0,059 m$$

$t_2 = 1s - 0,125s = 0,875s$  και για αυτό το χρονικό διάστημα μα κάνει κύλιση, άρα θα διανύσει απόσταση

$x_1' = u_{cm} t_2 = 0,942 \cdot 0,875 = 0,824 m$ . Η συνολική μετατόπισή του είναι  $\Delta x_1 = x_{cm1} + x_1' = 0,059 + 0,824 = 0,883 m$

σφαίρα:  $\Sigma \tau = I_{cm} \alpha'_{\gamma}$ ,  $TR = (2/5)mR^2 \alpha'_{\gamma}$ ,  $\mu mgR = (2/5)mR^2 \alpha'_{\gamma}$ ,  $\alpha'_{\gamma} = 2,5\mu g/R = 2,5 \cdot 0,75 \cdot 10/0,1 = 187,5 r/s^2$

$$u'_{cm} = \omega' R \text{ ή } u_{cm} - \alpha'_{cm} t_2 = \alpha'_{\gamma} t_2 R, t_2 = \frac{u_{cm}}{a'_{cm} + \alpha'_{\gamma} R} = \frac{2\sqrt{2}}{7,5 + 187,5 \cdot 0,1} = \frac{2\sqrt{2}}{26,25} s = 0,107 s \text{ άρα}$$

$$u'_{cm} = u_{cm} - \alpha'_{cm} t_2 = 2\sqrt{2} - 7,5 \cdot 0,107 = 2,026 m/s$$

$$x_2 = u_{cm} t_2 - \frac{1}{2} \alpha_{cm} t_2^2 = 2\sqrt{2} \cdot 0,107 - 0,5 \cdot 7,5 \cdot 0,107^2 = 0,259 m$$

Κατόπιν κυλάει χωρίς ολίσθηση για  $t_2' = 1 - 0,107 = 0,893s$  και διανύει  $x_2' = u_{cm}' \cdot t_2' = 2,026 \cdot 0,893 = 1,809 m$

άρα διένυσε  $\Delta x_2 = x_2 + x_2' = 0,259 + 1,809 = 2,068 m$

Τα κέντρα των στερεών θα απέχουν 1s μετά την κρούση τους:  $\Delta x_{1,2} = \Delta x_2 - \Delta x_1 + 2R = 2,068 - 0,883 + 0,2$

$$\Delta x_{1,2} = 1,385 m = 138,5 cm.$$

Οι ταχύτητες των στερεών 1 δευτερόλεπτο μετά την κρούση τους είναι:

$$\text{κύλινδρος: } u_{cm, \text{κυλ.}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,942 m/s \quad \text{σφαίρας: } u'_{cm, \text{σφ}} = 2,026 m/s$$