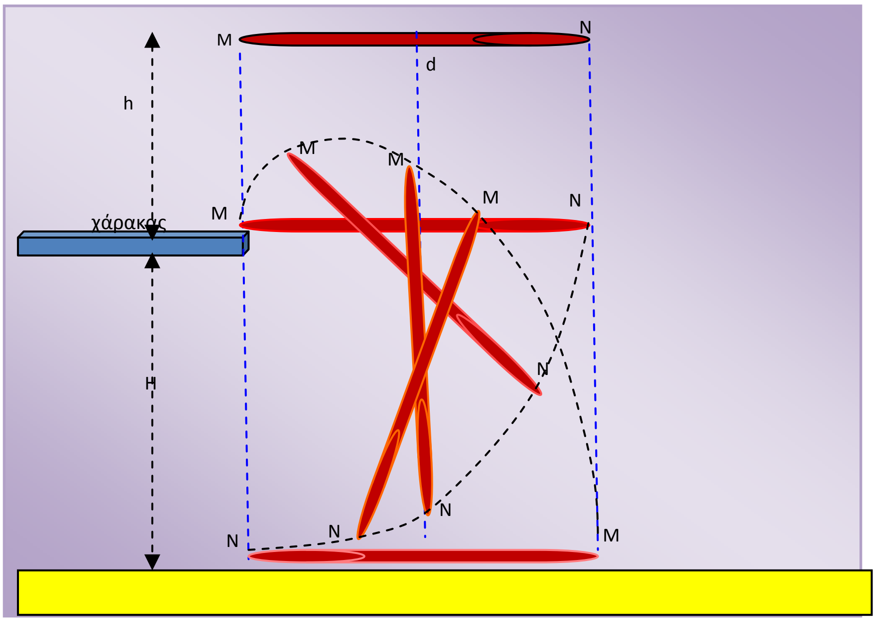
# 1. Μολύβι, χάρακας, κρούση και… πειραματική επαλήθευση του θεωρητικού αποτελέσματος

Πάρτε ένα μολύβι, ένα χάρακα και κάντε το εξής πείραμα: Κρατείστε το χάρακα σε ύψος Η από το τραπέζι, μετρείστε πάνω από το χάρακα σε ύψος όσο και το μολύβι h=d(μήκος μολυβιού), οριζοντιώστε το μολύβι και




αφήστε το έτσι ώστε να συγκρουσθεί η άκρη του με την άκρη του χάρακα, ας υποθέσουμε ελαστικά. Θέλουμε το μολύβι μετά την κρούση, να κάνει μισή στροφή, τη στιγμή που θα βρίσκει το τραπέζι.

Με δεδομένα : d, g,m , $I_{cm} = \frac{1}{12}\mathrm{md}^2$ να βρείτε:

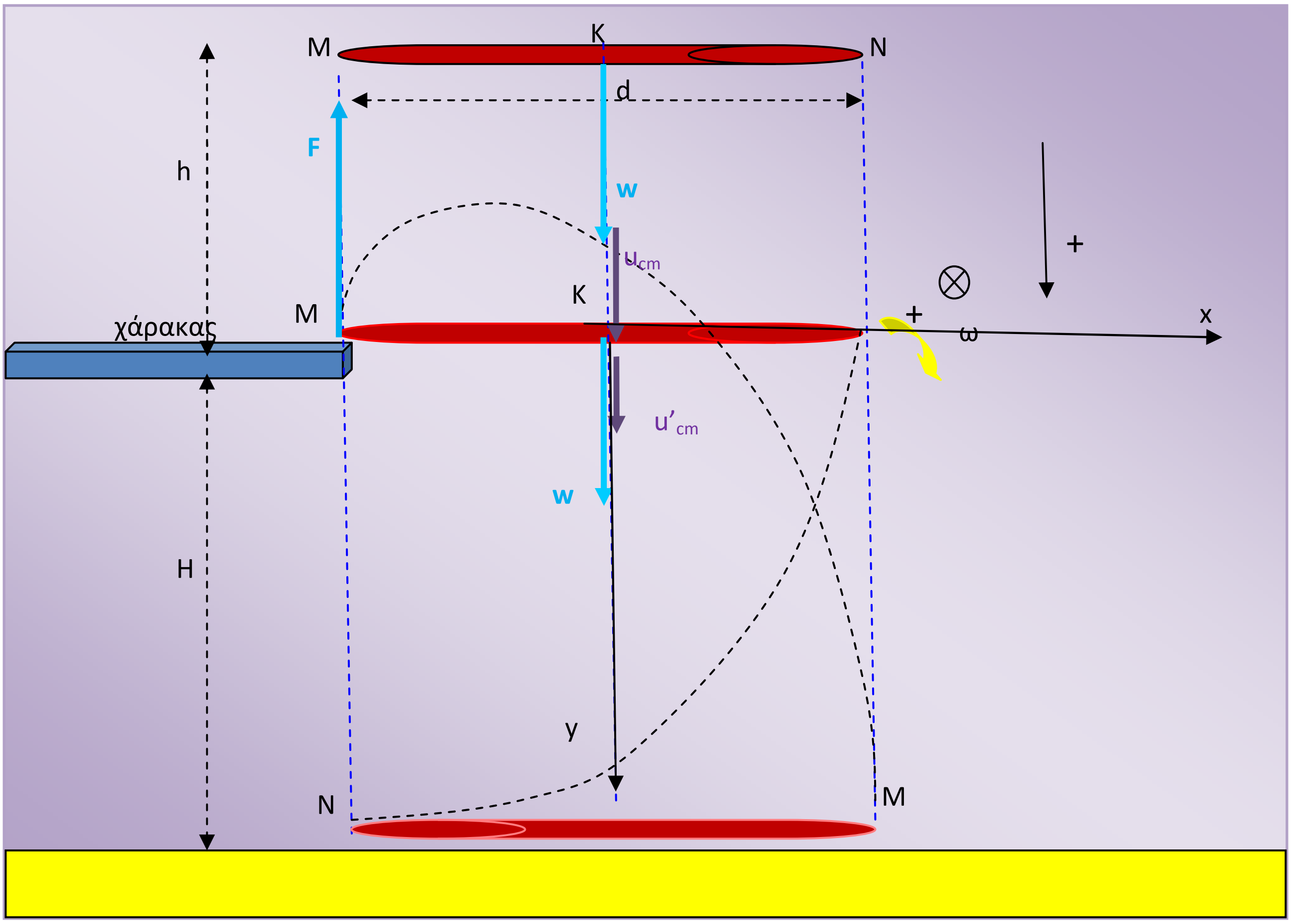
Α) το ύψος Η (για επαλήθευση του αποτελέσματος που βρήκατε, δοκιμάστε το πολλές φορές και μετρείστε το ύψος Η, οι κρούσεις είναι περίπου ελαστικές).

Β) Να γράψετε τις εξισώσεις που δίνουν τις **θέσεις** και τις **ταχύτητες** του **κέντρου μάζας, και των άκρων του μολυβιού** , μετά την κρούση, με σύστημα αξόνων το κέντρο του μολυβιού αμέσως μετά την κρούση και θετική φορά περιστροφής την ωρολογιακή.

Γ) Επαναλαμβάνουμε, αλλά η ελαστικά κρούση του μολυβιού με το χάρακα θα γίνει σε απόσταση d/4 από το άκρο του μολυβιού. Δείξτε ότι το μολύβι θα ξανασυγκρουσθεί με το χάρακα.

Δ) Επαναλαμβάνουμε, και θέλουμε η κρούση να γίνει σε σημείο Σ του μολυβιού, που απέχει απόσταση x από το κέντρο του, τέτοια ,ώστε μετά την κρούση το *κέντρο του μολυβιού να έχει ταχύτητα μηδέν. Υπολογίστε το x, και εξετάστε αν θα ξαναγίνει 2η κρούση.*

## Απάντηση:




*Η ράβδος κάνει ελεύθερη πτώση, άρα* $\boldsymbol{u_{cm}} = \boldsymbol{g t_1}$ $, \boldsymbol{h} = \frac{1}{2}\boldsymbol{g t_1^2}$ *, άρα* $\boldsymbol{u_{cm}} = \sqrt{\boldsymbol{2gh}}$ *(1)*

*Εφόσον η κρούση είναι ελαστική, η μέση δύναμη* **F** *που δέχεται από το χάρακα είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω, και πολύ μεγαλύτερη του βάρους. Εφαρμόζουμε τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για την κρούση κι έχουμε:* $\overrightarrow{\boldsymbol{\Sigma F}} = \frac{\overrightarrow{d\boldsymbol{P}}}{dt}$ ή $\vec{\boldsymbol{w}} + \vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\boldsymbol{m}(\overrightarrow{\boldsymbol{u'_{cm}}} - \vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{cm})}{\boldsymbol{dt}}$

*Επειδή τα διανύσματα* $\vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{F}}, \vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{cm}$ *είναι κατακόρυφα η διανυσματική ισότητα επιβάλει και το διάνυσμα* $\overrightarrow{\boldsymbol{u'_{cm}}}$ *θα είναι συγγραμμικό με αυτά, άρα θα είναι* κατακόρυφο, άρα $w - F = \frac{m(u'_{cm} - u_{cm})}{dt}$ **(2) επειδή** $u'_{cm} - u_{cm} < 0 \leftrightarrow u'_{cm} < u_{cm}$ λόγω του ότι μέρος της κινητικής ενέργειας της ράβδου γίνεται στροφική κινητική ενέργεια, κι αυτό γιατί κατά την κρούση ασκείται η ροπή της F ως προς το κέντρο μάζας Κ, άρα **w<F (i)**

Ισχύει: $\Sigma\tau_{cm} = \frac{d\vec{L}}{dt} \to F \cdot \frac{d}{2} = \frac{I_{cm} \cdot \omega}{dt} \to F \cdot \frac{d}{2} = \frac{\frac{1}{12}md^2 \cdot \omega}{dt} \to F = \frac{md\omega}{6dt}$ (3)

Η ράβδος ,αμέσως μετά την ελαστική κρούση της με το χάρακα, κάνει σύνθετη κίνηση, μεταφορική κατακόρυφη με επιτάχυνση g και στροφική γύρω από το μέσο της (κέντρο μάζας Κ) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω που απέκτησε κατά την κρούση. Επειδή η κρούση διαρκεί αμελητέο χρονικό διάστημα, η ροπή του βάρους μεταβάλει ελάχιστα τη στροφορμή της, άρα η στροφορμή διατηρείται ως προς το σημείο κρούσης Μ ως προς το οποίο θα πάρουμε τη Διατήρηση της στροφορμής:

$$\vec{L}\pi\rho\iota\nu_M = \vec{L}\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}_M \quad , \quad mu_{cm}\frac{d}{2} = mu'_{cm}\frac{d}{2} + I_{cm}\omega \ \acute{\eta}\ m(u_{cm} - u'_{cm}) = \frac{2I_{cm}\omega}{d} \quad (4)$$

Η κρούση είναι ελαστική, άρα διατηρείται η κινητική ενέργεια:

$K_{o\lambda.\alpha\rho\chi.} = K_{o\lambda.\tau\varepsilon\lambda.}$

$$\frac{1}{2}mu_{cm}^2 = \frac{1}{2}mu_{cm}'^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

$$m(u_{cm}^2 - u_{cm}'^2) = I_{cm}\omega^2 \quad \acute{\eta} \quad m(u_{cm} - u'_{cm})(u_{cm} + u'_{cm}) = I_{cm}\omega^2 \quad (5)$$

Διαιρούμε τις (4) και (5) κι έχουμε : $u_{cm} + u'_{cm} = \frac{d\omega}{2}$ **(6)**

**από την (4) έχουμε:** $u_{cm} - u'_{cm} = \frac{2I_{cm}\omega}{md} = \frac{2\omega\frac{1}{12}md^2}{md} = \frac{1}{6}d\omega$ (7)

**(6)+(7):** $2u_{cm} = \frac{2}{3}d\omega \quad \acute{\eta} \quad \omega = \frac{3u_{cm}}{d} = \frac{3\sqrt{2gh}}{d}$ **(8)**

**από (7) έχουμε:** $u'_{cm} = u_{cm} - \frac{1}{6}d\omega = u_{cm} - \frac{1}{6}d\frac{3u_{cm}}{d} = \frac{u_{cm}}{2} = \frac{\sqrt{2gh}}{2}$ **(9)**

Θεωρώ σύστημα αναφοράς που διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου, αμέσως μετά την κρούση. Η κίνηση του Κ είναι κατακόρυφη με επιτάχυνση g,έτσι οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\boldsymbol{u_y = u'_{cm} + gt = \frac{\sqrt{2gh}}{2} + gt} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{y = u'_{cm}t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{\sqrt{2gh}}{2}t + \frac{1}{2}gt^2} \quad (9)$$

και για τη στροφική κίνηση: φ=ωt ή $\boldsymbol{\phi = \frac{3\sqrt{2gh}}{d}t}$ **(10)**

Το μολύβι θα κάνει μισή στροφή μέχρι να βρει το δάπεδο, άρα **φ=π** και λόγω της (10) έχουμε: $\boldsymbol{t = \frac{d\pi}{3\sqrt{2gh}}}$ (11) και αντικαθιστώντας στην (9) **y=H** έχω

$$\boldsymbol{H = \frac{\sqrt{2gh}}{2}\frac{d\pi}{3\sqrt{2gh}} + \frac{1}{2}g\left(\frac{d\pi}{3\sqrt{2gh}}\right)^2 \rightarrow H = \frac{\pi d}{6} + \frac{(\pi d)^2}{36h}}$$

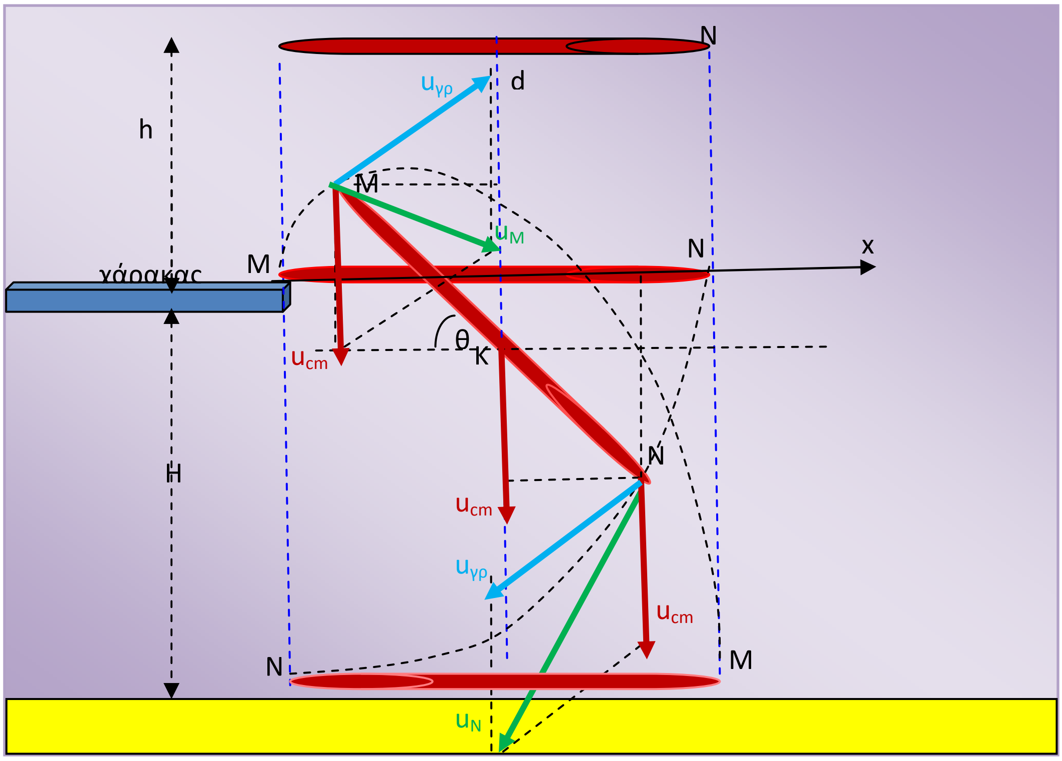
$\boldsymbol{H = \frac{\pi d}{6}\left(1 + \frac{\pi d}{6h}\right)}$ και επειδή **h=d** έχουμε: $H = \frac{\pi d}{6}\left(1 + \frac{\pi}{6}\right)$ ή **H=0,797 d**

Για το ελάχιστο ύψος H με δεδομένο το μήκος του μολυβιού d , έχουμε σε χρόνο T/4 το μολύβι στρέφεται κατά π/2. Πρέπει σε αυτό το χρόνο το κέντρο μάζας Κ να είναι σε ύψος μεγαλύτερο από d/2 ,

δηλαδή $y_{cm} \geq \frac{d}{2} \rightarrow \boldsymbol{\frac{\sqrt{2gh}}{2}t + \frac{1}{2}gt^2 \geq \frac{d}{2}}$

όμως $t = \frac{T}{4} = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{4} = \frac{\pi}{3\frac{\sqrt{2gh}}{d}} = \frac{d\pi}{3\sqrt{2gh}}$, $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2gh}}{2}\frac{d\pi}{3\sqrt{2gh}} + \frac{1}{2}g\left(\frac{d\pi}{3\sqrt{2gh}}\right)^2 \geq \frac{d}{2}}$

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2 d}{18h} \geq 1 \rightarrow$ ισχύει , άρα δεν βρίσκει η μύτη του μολυβιού το δάπεδο.




β)

*Το άκρο Μ έχει συντεταγμένες :*

$$x_M = -\frac{d}{2}συνωt = -\frac{d}{2}συν\left(\frac{3\sqrt{2gh}}{d}t\right) = -\frac{d}{2}συν\left(\sqrt{\frac{18g}{d}}t\right)$$

$$y_M = y_{cm} - \frac{d}{2}ημωt = \frac{\sqrt{2gh}}{2}t + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{d}{2}ημ\left(\sqrt{\frac{18g}{d}}t\right)$$

*ενώ το Ν :*

$$x_N = \frac{d}{2}συνωt = \frac{d}{2}συν\left(\sqrt{\frac{18g}{d}}t\right)$$

$$y_N = y_{cm} + \frac{d}{2}ημωt = \frac{\sqrt{2gh}}{2}t + \frac{1}{2}gt^2 + \frac{d}{2}ημ\left(\sqrt{\frac{18g}{d}}t\right)$$

*οι ταχύτητες των άκρων είναι η συνισταμένη της ταχύτητας του κέντρου μάζας και της σταθερής κατά μέτρο γραμμικής ταχύτητας*

$$u_{γρ} = ω\frac{d}{2} = \frac{3\sqrt{2gh}}{d}\frac{d}{2} = \frac{3\sqrt{2gh}}{2}$$

$$u_M = \sqrt{u_{cm}^2 + u_{\gamma\rho}{}^2 + 2u_{\gamma\rho}u_{cm}\sigma\upsilon\nu(\pi - \theta)}$$

$$= \sqrt{(\frac{\sqrt{2gh}}{2} + gt\ \ )^2\ + (\frac{3\sqrt{2gh}}{2})^2 - 2\frac{3\sqrt{2gh}}{2}(\frac{\sqrt{2gh}}{2} + gt)\sigma\upsilon\nu(\sqrt{\frac{18g}{d}}t)}$$

$$u_N = \sqrt{u_{cm}^2 + u_{\gamma\rho}{}^2 + 2u_{\gamma\rho}u_{cm}\sigma\upsilon\nu(\theta)} =$$

$$\sqrt{(\frac{\sqrt{2gh}}{2} + gt)^2\ + (\frac{3\sqrt{2gh}}{2})^2 + 2\frac{3\sqrt{2gh}}{2}(\sqrt{\frac{3gh}{2}} + gt)\sigma\upsilon\nu(\sqrt{\frac{18g}{d}}t)}$$

**Γ)** Η ράβδος κάνει ελεύθερη πτώση, άρα $u_{cm} = gt_1$ ,$h = \frac{1}{2}gt_1^2$ ,άρα $u_{cm} = \sqrt{2gh}$ (1)

Εφόσον η κρούση είναι ελαστική, η μέση δύναμη F που δέχεται από το χάρακα είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω, και πολύ μεγαλύτερη του βάρους. Εφαρμόζουμε τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για την κρούση κι έχουμε: $\vec{\Sigma F} = \frac{\vec{dP}}{dt}$ ή $\vec{w} + \vec{F} = \frac{m(\vec{u'_{cm}} - \vec{u}cm)}{dt}$

Επειδή τα διανύσματα $\vec{w}, \vec{F}, \vec{u}cm$ είναι κατακόρυφα η διανυσματική ισότητα επιβάλει και το διάνυσμα $\overrightarrow{u'_{cm}}$ θα είναι συγγραμμικό με αυτά, άρα θα είναι κατακόρυφο, άρα $w - F = \frac{m(u'_{cm} - u_{cm})}{dt}$ **(2) επειδή** $u'_{cm} - u_{cm} < 0 \leftrightarrow u'_{cm} < u_{cm}$ λόγω του ότι μέρος της κινητικής ενέργειας της ράβδου γίνεται στροφική κινητική ενέργεια, κι αυτό γιατί κατά την κρούση ασκείται η ροπή της F ως προς το κέντρο μάζας Κ, άρα **w<F (i)**

Ισχύει: $\Sigma\tau_{cm} = \frac{\vec{dL}}{dt} \to F \cdot \frac{d}{4} = \frac{I_{cm} \cdot \omega}{dt} \to F \cdot \frac{d}{4} = \frac{\frac{1}{12}md^2 \cdot \omega}{dt} \to F = \frac{md\omega}{3dt}$ (3)

Η ράβδος ,αμέσως μετά την ελαστική κρούση της με το χάρακα, κάνει σύνθετη κίνηση, μεταφορική κατακόρυφη με επιτάχυνση g και στροφική γύρω από το μέσο της (κέντρο μάζας Κ) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω που απέκτησε κατά την κρούση. Επειδή η κρούση διαρκεί αμελητέο χρονικό διάστημα, η ροπή του βάρους μεταβάλει ελάχιστα τη στροφορμή της, άρα η στροφορμή διατηρείται ως προς το σημείο κρούσης Μ ως προς το οποίο θα πάρουμε τη Διατήρηση της στροφορμής:

$$\vec{L}\pi\rho\iota\nu_{\Sigma} = \vec{L}\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}_{\Sigma} \quad , \quad mu_{cm}\frac{d}{4} = mu'_{cm}\frac{d}{4} + I_{cm}\omega \text{ ή } m(u_{cm} - u'_{cm}) = \frac{4I_{cm}\omega}{d} \quad (4)$$

Η κρούση είναι ελαστική, άρα διατηρείται η κινητική ενέργεια:

$K_{ολ.αρχ.} = K_{ολ.τελ.}$

$$\frac{1}{2}mu_{cm}^2 = \frac{1}{2}mu_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

$$m(u_{cm}^2 - u_{cm}^2) = I_{cm}\omega^2 \quad \text{ή} \quad m(u_{cm} - u'_{cm})(u_{cm} + u'_{cm}) = I_{cm}\omega^2 \quad (5)$$

Διαιρούμε τις (4) και (5) κι έχουμε : $u_{cm} + u'_{cm} = \frac{d\omega}{4}$ **(6)**

**από την (4) έχουμε:** $u_{cm} - u'_{cm} = \frac{4I_{cm}\omega}{md} = \frac{4\omega\frac{1}{12}md^2}{md} = \frac{d\omega}{3}$ **(7)**

**(6)+(7):** $2u_{cm} = \frac{7}{12}d\omega$ ή $\omega = \frac{24u_{cm}}{7d} = \frac{24\sqrt{2gh}}{7d}$ **(8)**

**από (7) έχουμε:** $u'_{cm} = u_{cm} - \frac{1}{3}d\omega = u_{cm} - \frac{1}{3}d\frac{24u_{cm}}{7d} = -\frac{u_{cm}}{7} = -\frac{\sqrt{2gh}}{7}$ **(9)**

**Το αρνητικό πρόσημο της ταχύτητας του κέντρου μάζας σημαίνει ότι το μολύβι αναπηδά μετά την κρούση του με το χάρακα και περιστρεφόμενο.**

*Θεωρώ σύστημα αναφοράς που διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου, αμέσως μετά την κρούση. Η κίνηση του Κ είναι κατακόρυφη με επιτάχυνση g,έτσι οι εξισώσεις κίνησης είναι:*

$$u_y = u'_{cm} + gt = -\frac{\sqrt{2gh}}{7} + gt \quad (8)$$

$$y_{cm} = u'_{cm}t + \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{\sqrt{2gh}}{7}t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (9)$$

*και για τη στροφική κίνηση:* $\phi = \omega t$ *ή* $\phi = \frac{24\sqrt{2gh}}{7d}t$ *(10)*

*Το μολύβι θα κάνει μισή στροφή , άρα* $\phi = \pi$ *και λόγω της (10) έχουμε:* $t = \frac{7d\pi}{24\sqrt{2gh}}$ *(11) και αντικαθιστώντας στην (9) έχω*

$$y_{cm}' = -\frac{\sqrt{2gh}}{7}\frac{7d\pi}{24\sqrt{2gh}} + \frac{1}{2}g\left(\frac{7d\pi}{24\sqrt{2gh}}\right)^2 \rightarrow y_{cm} = -\frac{\pi d}{24} + \frac{(7\pi d)^2}{2304h}$$

$y_{cm} = \frac{\pi d}{24}(-1 + \frac{49\pi d}{96h})$ και επειδή h=d έχουμε: $y_{cm} = \frac{\pi d}{24}\left(-1 + \frac{49\pi}{96}\right)$ ή
$y_{cm}$ **=0,079 d.**

***Δηλαδή το κέντρο μάζας του μολυβιού είναι ελάχιστα πάνω από τη θέση που έγινε η κρούση κι έχει κάνει μισή στροφή, άρα βρίσκει το χάρακα με το άκρο Ν, με αποτέλεσμα να πάρει ανάποδες στροφές μετά την δεύτερη κρούση.***

**Δ) Θέλουμε μετά την κρούση η ταχύτητα του κέντρου μάζας να είναι μηδέν, δηλαδή $u'_{cm} = 0$** Επειδή η κρούση διαρκεί αμελητέο χρονικό διάστημα, η ροπή του βάρους μεταβάλει ελάχιστα τη στροφορμή της, άρα η στροφορμή διατηρείται ως προς οποιοδήποτε σημείο. Διαλέγουμε το σημείο κρούσης Σ ως προς το οποίο θα πάρουμε τη Διατήρηση της στροφορμής:

$$\vec{L}\pi\rho\iota\nu_{\Sigma} = \vec{L}\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}_{\Sigma} \quad , \quad m u_{cm} x = I_{cm}\omega \quad (4)$$

Η κρούση είναι ελαστική, άρα διατηρείται η κινητική ενέργεια:
$K_{ολ.αρχ.} = K_{ολ.τελ.}$

$$\frac{1}{2} m u_{cm}^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2$$

$$m u_{cm}^2 = I_{cm}\omega^2 \quad (5)$$

Διαιρούμε τις (4) και (5) κι έχουμε : $\frac{u_{cm}}{x} = \omega$ ή $\omega = \frac{\sqrt{2gh}}{x}$ **(6)**

**από την (4) έχουμε:** $m x\sqrt{2gh} = \frac{1}{12} m d^2 \frac{\sqrt{2gh}}{x}$

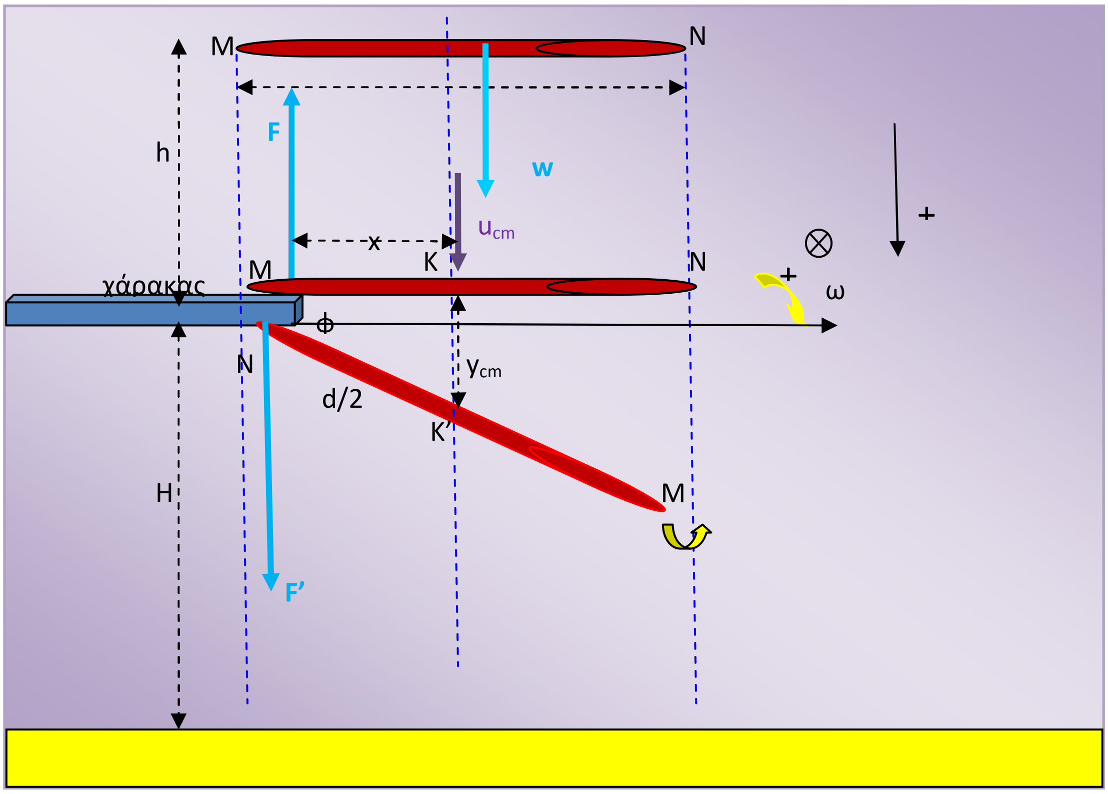
$x^2 = \frac{d^2}{12}$ ή $x = \frac{d}{2\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{6} \Longrightarrow x = \frac{d\sqrt{3}}{6} = 0,288d$

**Η γωνιακή ταχύτητα του μολυβιού θα είναι τότε:** $\omega = \frac{\sqrt{2gd}}{\frac{d\sqrt{3}}{6}} = 6\sqrt{\frac{2g}{3d}}$

**Το μολύβι θα κάνει μισή στροφή σε χρόνο** $t = \frac{T}{2} = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{2} = \frac{\pi}{6\sqrt{\frac{2g}{3d}}} = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{3d}{2g}} = \pi\sqrt{\frac{d}{24g}}$

**και το κέντρο του θα μετατοπισθεί προς τα κάτω, κάνοντας ελεύθερη πτώση, κατά:** $y_{cm} = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \frac{\pi^2 d}{24g} = \frac{\pi^2 d}{48} = 0,205d$ .

Για να μην ξαναγίνει κρούση, πρέπει το άκρο Ν του μολυβιού να περάσει ξυστά, στην οριακή περίπτωση, από την άκρη του χάρακα. Τότε το κέντρο μάζας θα έχει μετατοπισθεί κατά: $y_{cm} = \sqrt{(\frac{d}{2})^2 - x^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} - (\frac{d\sqrt{3}}{6})^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{12}} = \frac{d}{\sqrt{6}} = \frac{d\sqrt{6}}{6}$




$$y_{cm} = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{d\sqrt{6}}{6} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{d\sqrt{6}}{3g}}$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{y_{cm}}{d/_2} = \frac{\frac{d\sqrt{6}}{6}}{\frac{d}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0,4 \Rightarrow \varphi = 24^0 = \frac{\pi.24}{180} = \frac{2\pi}{15}\, rad$$

Η γωνία που θα έχει στραφεί το μολύβι είναι

π+φ=π+2π/15=17π/15=ωt ή $\frac{17\pi}{15} = 6\sqrt{\frac{2g}{3d}}t \Rightarrow t = \frac{17\pi}{90} \cdot \sqrt{\frac{3d}{2g}}$ χρονική στιγμή που θα περνούσε ξυστά από το άκρο του χάρακα. Άρα το Κ θα είχε μετατοπιστεί $y_{cm} = \frac{1}{2}gt^2 = y_{cm} = \frac{1}{2}g(\frac{17\pi}{90} \cdot \sqrt{\frac{3d}{2g}})^2 = 0,026d < 0,205d$ που αντιστοιχεί για μισή στροφή του μολυβιού, άρα ΠΟΤΕ δεν θα περάσει ξυστά το μολύβι από το άκρο του χάρακα ,γιατί θα συγκρουσθεί πιο πριν μ'αυτόν.

*Η 2η  κρούση του μολυβιού θα γίνει από το κάτω μέρος του χάρακα , και μετά την κρούση το μολύβι θα πάρει ανάποδες στροφές και θα πέσει στο τραπέζι.*

***Κορκίζογλου Πρόδρομος*** ***prodkork@hotmail.com*** ***7ο Γ.Ε.λ. Ν.Σμύρνης***