1ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΤΩΝ ΕΠΑΓΩΓΙΚΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ

Παλίλης Βασίλης *Φυσικός-Παιδαγωγός*

Πολυζώης Γιώργος *Φυσικός-Μαθηματικός*

Τσιγαρίδας Ηλίας *Πληροφορικός*

Τηλέφωνα Επικοινωνίας

5903208

5321081

ΠΕΡΙΛΗΨΗ: Στην εργασία εφαρμόζεται ο κανόνας των «τριών», όπως έχει επικρατήσει να λέγεται ο μοντέρνος τρόπος παρουσίασης μαθηματικών εννοιών.
Ο κανόνας των «τριών» [*The rule of three*] (αλγεβρική, γραφική, αριθμητική προσέγγιση) εφαρμόζεται για την ασυμπτωτική συμπεριφορά φυσικών μεγεθών στα επαγωγικά φαινόμενα.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν ιδιαίτερα από τη γραφική και αριθμητική προσέγγιση του προβλήματος μέσω υπολογιστών εφεσιβάλλουν παγιωμένες απόψεις που επικρατούν για τη μελέτη των επαγωγικών φαινομένων.

Η εφαρμογή των μαθηματικών σε εντελώς νέα πεδία της λυκειακής ύλης και η χρήση υπολογιστών είναι αδύνατον πλέον να αγνοηθούν.

1.1Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι η θεωρία σφαλμάτων και η ακρίβεια των οργάνων καθορίζουν τα όρια της μέτρησης ενός φυσικού μεγέθους.

Με βάση το δεδομένο αυτό γεννάται το φυσιολογικό ερώτημα πώς θα ερμηνευτεί η <u>ασυμπτωτική συμπεριφορά</u> ενός φυσικού μεγέθους.

Ας θεωρήσουμε ότι το ερώτημα είναι λυμένο για τον ΦΥΣΙΚΟ μέσα σ' ένα πλαίσιο που πηγάζει από την ακριβή μαθηματική γνώση και τη γνώση της θεωρίας σφαλμάτων. Παραμένει το πρόβλημα του ΠΩΣ η ασυμπτωτική συμπεριφορά ενός φυσικού μεγέθους είναι διδακτικά προσπελάσιμη και ΠΩΣ επιδέχεται απλοποιήσεις σύμφωνες με τη φυσική και προπάντων σύμφωνες με τη μαθηματική ακρίβεια.

1.2Γενικό Μέρος

1.2.ΙΟ Κανόνας των «τριών» (The Rule of Three)

Ο παραπάνω κανόνας είναι μια σύγχρονη άποψη για την παρουσίαση και την αξιολόγηση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές[1].

Ο κανόνας αυτός προτείνει την παρουσίαση μιας μαθηματικής έννοιας με ΑΛΓΕΒΡΙΚΟ, ΓΡΑΦΙΚΟ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ) και ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ (με την έννοια περισσότερο της αριθμητικής ανάλυσης) τρόπο.

Με τον τρόπο αυτό βοηθείται περισσότερο ο μαθητής στην κατανόηση της έννοιας, αυξάνει το ενδιαφέρον του και οδηγείται ευκολότερα στο να ανακαλύπτει μόνος του προβληματικές καταστάσεις.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα των «τριών» στη φυσική αναδεικνύουμε τα πιο βασικά συστατικά αυτού που στα μαθηματικά ονομάζεται μοντελοποίηση (modeling)[2,3] .

Συγκεκριμένα, μπορούμε να αναλύσουμε τα μαθηματικά αποτελέσματα ενός προβλήματος και να τα συγκρίνουμε με μια πραγματική φυσική κατάσταση.

1.2.ΙΙΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

Η χρήση των υπολογιστών είναι δυνατό να βοηθήσει και στα τρία μέρη του παραπάνω κανόνα. Το ΑΛΓΕΒΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ, δηλαδή η αναλυτική λύση ενός μαθηματικού προβλήματος, παραμένει και μέσω των υπολογιστών μυστηριώδης και δυσεξήγητη, αφού τις περισσότερες φορές με τη βοήθεια του κατάλληλου προγράμματος παρουσιάζεται έτοιμη στην οθόνη. Ακόμη, όμως, και σ΄ αυτήν την περίπτωση είναι δυνατόν να υπάρξουν θετικά αποτελέσματα, όταν η πλήρης λύση συνδυαστεί με το ΓΡΑΦΙΚΟ και ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ μέρος του κανόνα, στα οποία προφανώς η χρήση υπολογιστών μπορεί να βοηθήσει πολλαπλά[4].

1.2.ΙΙΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Για την ασυμπτωτική συμπεριφορά απαραίτητη είναι η έννοια του ορίου στο άπειρο ή σε πραγματικό αριθμό. Για την εργασία μας είναι απαραίτητο να διευκρινίσουμε ότι η έννοια του ορίου σε επίπεδο που δεν χρησιμοποιείται διαφορικός λογισμός (non calculus), μπορεί να παρουσιαστεί διαισθητικά με την έννοια του «τείνει» ένα μέγεθος σε μια τιμή[5].

1.2.IVΗ ΦΥΣΙΚΗ

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά εμφανίζεται στη λυκειακή φυσική στην οριζόντια ασύμπτωτη (π.χ. στα μεταβατικά φαινόμενα) και στην κατακόρυφη ασύμπτωτη (π.χ. στην καμπύλη συντονισμού RLC κυκλώματος με $R \to 0$). Απουσιάζει η πλάγια ασύμπτωτη.

Σε διδακτικό επίπεδο που δε χρησιμοποιεί διαφορικό λογισμό για την έννοια της ασύμπτωτης, χρησιμοποιούνται εξηγήσεις του τύπου «το μέγεθος *τείνει* σε μια τιμή», όπως αναφέρθηκε παραπάνω.

Η παραπάνω εξήγηση του «τείνει» αξίζει να αναφερθεί ότι συμπληρώνεται από τους διδάσκοντες με κάποιες συνθήκες, μέσα στις οποίες το φυσικό μέγεθος αποκτά ως δια μαγείας μια σταθερή (οριακή) τιμή, [*π.χ. χρόνος αποκατάστασης 5τ*] πράγμα αντιφατικό με τη μαθηματική έννοια της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς, αλλά καθ' όλα νόμιμο στα πλαίσια της φυσικής μέτρησης και της ακρίβειας των οργάνων.

Το δυστύχημα με τις παραπάνω αναφορές είναι ότι η απόκτηση της οριακής τιμής δε συνδέεται με κανενός είδους προσέγγιση. Όταν αναφερόμαστε στην έννοια της προσέγγισης την εννοούμε περισσότερο ως παροχή αριθμών, πινάκων και ασκήσεων προκειμένου να πεισθούν οι μαθητές για τη σύγκλιση ενός φυσικού μεγέθους σε μια σταθερή τιμή. Έτσι, χάνεται η δυνατότητα να δοθεί μια ακόμη πιο πειστική εξήγηση σε επίπεδο χωρίς διαφορικό λογισμό, για την αντίφαση μεταξύ της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς και της πραγματοποιήσιμης πειραματικής σταθερής τιμής. Η παρατήρηση αυτή συνδέεται με το ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ μέρος του κανόνα των «τριών».

Στη διδακτική πράξη, και πολύ ορθά, χρησιμοποιούνται γραφικές παραστάσεις και ικανοποιείται με τον τρόπο αυτό το ΓΡΑΦΙΚΟ μέρος του κανόνα των «τριών». Δε γίνεται, όμως, σ' αυτές εκμετάλλευση των Υπολογιστών, όπου (π.χ. με Zoom) θα μπορούσαν να αναδειχθούν περισσότερο καταστάσεις που σχετίζονται με την προσέγγιση[6].

1.2.VΗ ΣΗΜΕΙΟΛΟΓΙΑ

Έχουν αναφερθεί στη βιβλιογραφία διδακτικές καταστάσεις που σχετίζονται με την ορολογία και το συμβολισμό και τις λανθασμένες αντιλήψεις που προκαλούν. Επισημαίνουμε απλώς για την περίπτωσή μας :

ΦΥΣΙΚΗ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Οριακή-Σταθερή-Θεωρητική τιμή ⟷	*Ασυμπτωτική τιμή*

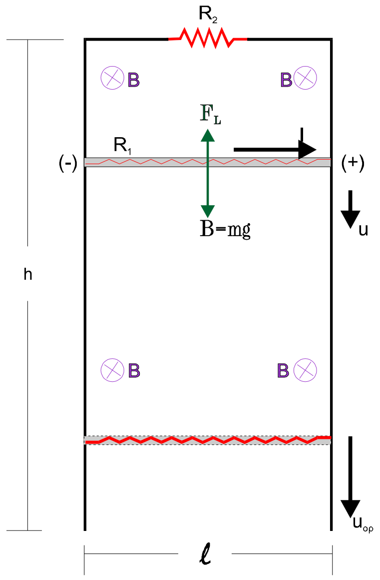
1.3ΔΕΔΟΜΕΝΑ: ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΚΡΙΤΙΚΗ

Θα εφαρμόσουμε τον κανόνα των «τριών» σε μια κατάσταση που είναι συχνή στη λυκειακή φυσική. Το πρόβλημα που θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα είναι το παρακάτω:

Τα άκρα ευθύγραμμου αγωγού, ο οποίος έχει μήκος l=1m, μάζα m=1Kg και αντίσταση R_1=0,05Ω, μπορούν να ολισθαίνουν χωρίς τριβές πάνω σε δύο κατακόρυφους μεταλλικούς στύλους μηδενικής ωμικής αντίστασης. Οι δύο στύλοι ενώνονται στο πάνω μέρος με σύρμα ωμικής αντίστασης R_2=0,15Ω. Η όλη διάταξη βρίσκεται μέσα σε ομογενές οριζόντιο μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής B=1Tesla, το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν ο αγωγός και η ταχύτητά του. Αρχικά ο αγωγός είναι ακίνητος. Κάποια στιγμή αφήνεται να ολισθήσει και αποκτά σταθερή (οριακή) ταχύτητα, αφού πέσει κατά h=2m. Να βρεθούν:

i. *Η σταθερή ταχύτητα που αποκτά ο αγωγός.*
ii. *Ο ρυθμός με τον οποίο αναπτύσσεται θερμότητα Joule σε κάθε μια από τις αντιστάσεις R_1 και R_2 κατά τη χρονική στιγμή που αποκτά ο αγωγός σταθερή ταχύτητα.*
iii. *Η θερμότητα Joule που αναπτύχθηκε σε κάθε μια από τις αντιστάσεις R_1 και R_2 στο χρονικό διάστημα κατά το οποίο κινήθηκε ο αγωγός από την αρχική του θέση μέχρι να αποκτήσει σταθερή ταχύτητα.*

Δίνεται $g=10m/sec^2$.



Στο σχήμα δίνεται μια εικόνα της κίνησης με έμφαση στην αιτία της, το βάρος και τα αποτελέσματα της, δηλαδή,
η ηλεκτρεργετική δύναμη που αναπτύσσεται από επαγωγή, το επαγωγικό ρεύμα και η δύναμη Laplace που οφείλεται σε αυτό.

1.3.ΙΑλγεβρικό μέρος

Εξετάζοντας την κίνηση της ράβδου και τις δυνάμεις που επιδρούν σ' αυτή έχουμε:

$$B - F_L = m\gamma$$

i. Η μαθηματικοποίηση του προβλήματος οδηγεί στη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης. Θα μπορούσε να δοθεί η πλήρης λύση της εξίσωσης έτοιμη, να την μεταχειριστούν οι μαθητές σύμφωνα με το πνεύμα της παραγράφου Η ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ. Οι πλήρεις λύσεις είναι:

$$s = 2t + 0.4(e^{-5t} - 1)$$
$$u = 2(1 - e^{-5t})$$

$$\gamma = 10e^{-5t}$$

ii. Στη διδακτική πράξη χωρίς διαφορικό λογισμό ακολουθείται ένας «φυσικός» τρόπος λύσης.

Ο «φυσικός» τρόπος που ακολουθείται είναι:

«Για *γ=0* έχω την $u_{ορ}$»

Η μαθηματική εξέταση του «φυσικού» τρόπου δείχνει:

$$\gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{du}{dt} = 0$$

(*με δεδομένο ότι ισχύουν όλες οι καλές ιδιότητες των μαθηματικών θεωρημάτων*)

Αν και μηδενισμός της παραγώγου δίνει ακρότατο, ο «φυσικός» τρόπος καταλήγει σε συμπέρασμα ότι η ταχύτητα αποκτά ΟΡΙΑΚΗ ΤΙΜΗ ($u_{ορ}$).

Κι αν ακόμα επιχειρηθεί να εφαρμοστεί ο «φυσικός» τρόπος λύσης στην πλήρη λύση του προβλήματος, με σκοπό να αναιρεθεί η αντίφαση, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\gamma = 10e^{-5t}\\ \gamma = 0\end{array}\right\} 10e^{-5t} = 0, \text{ οπότε } t = \infty\,!\,!\,!$$

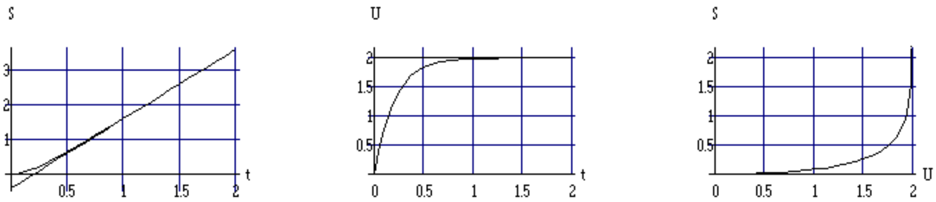
Συμπέρασμα: Ο «φυσικός» συλλογισμός $\gamma = 0$ δεν σημαίνει ακρότατο αλλά «*βάναυση*» χρήση της έννοιας του ορίου.

Δίλημμα: Είτε ακολουθούμε την πλήρη λύση, που είναι και ο πλέον ορθόδοξος τρόπος, είτε ξεκαθαρίζουμε ότι πρόκειται για όριο έστω και με το διαισθητικό τρόπο του «τείνει» που έχουμε αναφέρει (δηλ. $\gamma \to 0$ άρα $u \to u_{ορ}$), πράγμα που περιπλέκει την κατάσταση ακόμα περισσότερο, όπως θα δούμε παρακάτω.

1.3.ΙΙΓεωμετρικό μέρος

Μπορούμε να κατασκευάζουμε με την βοήθεια υπολογιστών γραφικές παραστάσεις μεγεθών με δύσκολους τύπους. Έτσι επιτυγχάνεται πλήρης εποπτική εκμετάλλευση των εξαρτήσεων των φυσικών μεγεθών.

Στο παράδειγμά μας δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των μεγεθών *s-t u-t* και *s-u*.



Εικόνα 1

Παρατηρείστε ότι παρουσιάζεται και πλάγια ασύμπτωτη που δεν αναφέρεται στη λυκειακή ύλη.

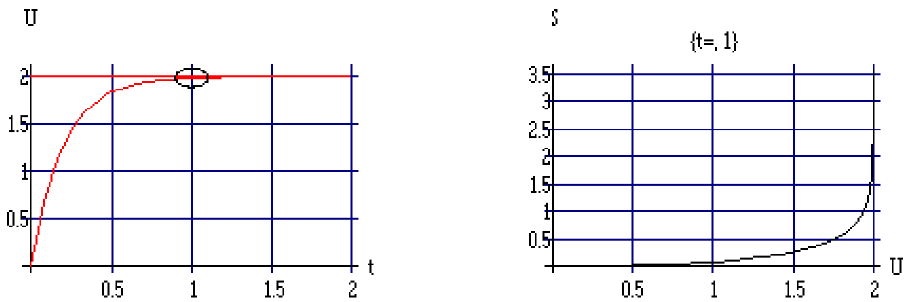
Πρέπει να σχολιαστεί, επίσης, το γεγονός της εμφάνισης και των τριών ειδών ασυμπτώτων.

1.3.IIIΑριθμητικό μέρος

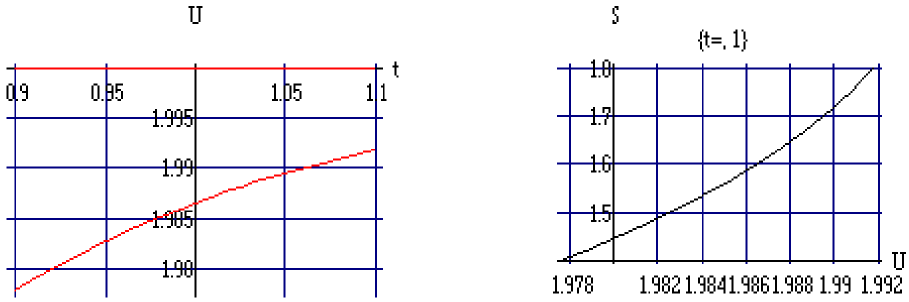
Το αριθμητικό μέρος απουσιάζει από τα βιβλία φυσικής παντελώς. Ακριβώς εδώ είναι , όπως έχουμε προαναφέρει, που χάνεται η ευκαιρία για μια δυναμική παρουσίαση της έννοιας του ορίου.

Χρόνος t (sec)	Μετατόπιση S (m)	Θερμότητα Q (Joule)	Ταχύτητα U (m/sec)
0,6	0,8199148273471450	6,3933390425895800	1,9004258632642700
0,8	1,2073262555554900	10,1458541858541000	1,9633687222225300
1,0	1,6026951787996300	14,0538127761332000	1,9865241060018300
1,2	2,0009915008706700	18,0198177289886000	1,9950424956466700
1,4	2,4003647527862200	22,0072933926670000	1,9981762360688900
1,6	2,8001341850511600	26,0026834759529000	1,9993290747441900
1,8	3,2000493639216300	30,0009872479727000	1,9997531803918300
2,0	3,6000181599719000	34,0003631953158000	1,9999092001404800
2,2	4,0000066806803200	38,0001336130484000	1,9999665965984200
2,4	4,4000024576849400	42,0000491536233000	1,9999877115752900
2,6	4,8000009041317600	46,0000180826250000	1,9999954793411900
2,8	5,2000003326114900	50,0000066522284000	1,9999983369425600
3,0	5,6000001223609300	54,0000024472184000	1,9999993881953600
3,2	6,0000000450140700	58,0000009002814000	1,9999997749296500
3,4	6,4000000165597500	62,0000003311950000	1,9999999172012500
3,6	6,8000000060919900	66,0000001218398000	1,9999999695400400
3,8	7,2000000022411200	70,0000000448224000	1,9999999887944100
4,0	7,6000000008244600	74,0000000164892000	1,9999999958776900
4,2	8,0000000003033000	78,0000000060661000	1,9999999984834900
4,4	8,4000000001115800	82,0000000022316000	1,9999999994421100
4,6	8,8000000000410500	86,0000000008209000	1,9999999997947600
4,8	9,2000000000151000	90,0000000003020000	1,9999999999245000
5,0	9,6000000000055500	94,0000000001111000	1,9999999999722200
5,2	10,0000000000020000	98,0000000000409000	1,9999999999897800
5,4	10,4000000000008000	102,0000000000150000	1,9999999999962400
5,6	10,8000000000003000	106,0000000000050000	1,9999999999986200
5,8	11,2000000000001000	110,0000000000020000	1,9999999999994900
6,0	11,6000000000000000	114,0000000000010000	1,9999999999998100
6,2	12,0000000000000000	118,0000000000000000	1,9999999999999300
6,4	12,4000000000000000	122,0000000000000000	1,9999999999999700
6,6	12,8000000000000000	126,0000000000000000	1,9999999999999900

Εικόνα 2



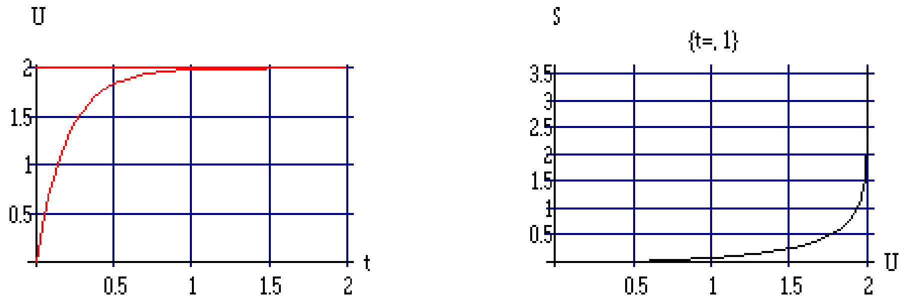
Εικόνα 3



Εικόνα 4 Zoom της Εικόνας 3 γύρω από την περιοχή του κύκλου

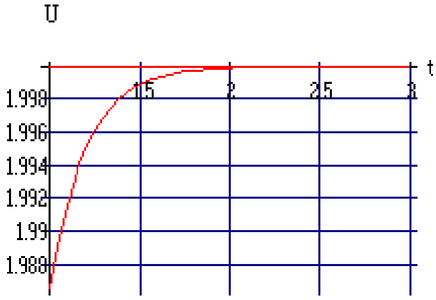
Από τον πίνακα και τα σχήματα φαίνεται για τα μαθηματικά ο ασυμπτωτικός χαρακτήρας του φαινομένου (στήλη ταχύτητας στον πίνακα και γραφικές παραστάσεις).

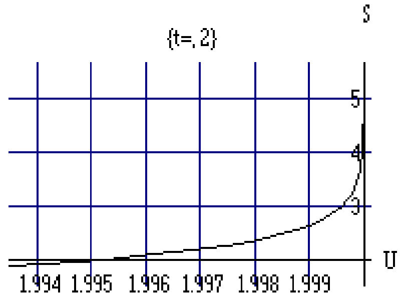
Για τη φυσική μπορούν να εκτιμηθούν οι περιορισμοί που προκύπτουν από πειραματική ακρίβεια ή ακρίβεια οργάνων.



Εικόνα 5

Ακρίβεια	**Ταχύτητα (m/sec)**	**Χρόνος (sec)**	**Διάστημα (m)**
Δεκάτου	2	1	2





Εικόνα 6

Ακρίβεια	Ταχύτητα (m/sec)	Χρόνος (sec)	Διάστημα (m)
Χιλιοστού	2	2	4

Άρση του διλήμματος: Ακολουθούμε την πλήρη λύση, που είναι ο ΜΟΝΟΣ ορθόδοξος τρόπος, γιατί οποιαδήποτε αναφορά στη διαισθητική έννοια του ορίου απαιτεί την απαραίτητη γι΄ αυτήν προσέγγιση.

1.4Αντιλήψεις διδασκόντων[7]

Αν και δεν αποτελεί κύριο στόχο της παρουσίασης, θεωρούμε ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά που εμφανίζεται στα επαγωγικά φαινόμενα σε συνάρτηση με τη χρησιμοποιούμενη σημειολογία γι΄ αυτά οδηγεί στην ακόλουθη αντίληψη των διδασκόντων:

«Τα επαγωγικά φαινόμενα, ως γνωστόν, έχουν σχέση με την έννοια του ορίου (για $t \to +\infty$ συνήθως), πρακτικά, όμως, σε κάποιο πεπερασμένο χρόνο (και μάλιστα όχι πολύ μεγάλο) τα μεγέθη που εμφανίζονται παίρνουν την σταθερή (οριακή) τους τιμή.»

Επειδή, όμως, μια ανάλυση πιο λεπτομερής, όπως αυτή που αναφέρθηκε, απουσιάζει στην αντίληψη που μόλις αναφέραμε, προστίθεται η λέξη ΟΛΑ [*δηλ. «...ΟΛΑ τα φυσικά μεγέθη παίρνουν την σταθερή τους τιμή»*].

Αυτή είναι μια λανθασμένη αντίληψη, όπως αποδείχτηκε από την ανάλυσή μας, γιατί στη διάρκεια ενός επαγωγικού φαινομένου μπορούν να υπάρχουν φυσικά μεγέθη που μεταβάλλονται έντονα (στήλη ταχύτητας και θερμότητας στον πίνακα).

1.5Συμπεράσματα

1. Στα φυσικά προβλήματα, στα οποία χρησιμοποιούνται βασικές μαθηματικές έννοιες, η πλήρης διερεύνησή των τελευταίων οδηγεί σε πληρέστερη κατανόηση.

2. Η χρήση υπολογιστών διευκολύνει και τα τρία μέρη ενός μαθηματικού προβλήματος.
3. Οι ενδεχόμενες απλοποιήσεις πρέπει να συνδέονται με την πλήρη λύση κατά τρόπο συνεπή και εκπεφρασμένο και όχι να παρουσιάζονται ως μαγική εικόνα ή ακόμη χειρότερα ως «φυσικός» τρόπος λύσης χωρίς τις κατάλληλες προσεγγίσεις.
4. Απαιτείται πλέον να εφαρμόζουμε μαθηματικά σε εντελώς νέα πεδία για τη φυσική, όπως στις προσεγγίσεις ή τα σφάλματα.
5. Οι παγιωμένες και λειτουργικιστικές αντιλήψεις δημιουργούν λανθασμένες αντιλήψεις στους διδάσκοντες.

1.6ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Τα παραπάνω εκτός από την ερευνητική αξία που έχουν ή τη διάθεση που εκφράζουν για περαιτέρω μελέτη πάνω σ΄ ένα θέμα που λίγο πολύ εξετάζεται με παγιωμένο τρόπο στη λυκειακή φυσική, αποκτούν μια επιπρόσθετη δραματική αξία μια και τα δεδομένα που παρουσιάστηκαν προέρχονται από το φετινό θέμα των Γ.Ε.Φ. ***! ! !***

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Davis, Paul *Asking Good Questions about Differentials Equations* CMJ, vol 25, No 5, Nov. 1994

[2] Νίκος Κλαουδάτος *Οι πρόσφατες εξελίξεις στην λύση προβλημάτων στην μοντελοποίηση και στις εφαρμογές των μαθηματικών.* ΕΥΚ. Γ -1989- τόμος 6 -τεύχος 23.
Μοντελοποίηση:ένα ισχυρό διδακτικό εργαλείο ΕΥΚ. Γ -1990-τόμος 7-τεύχος 25

[3] Schoenfeld, H. Alan *A Brief Biography of Calculus Reform* UME TRENDS vol 6, No 6

[4] Boyce, William E. *New Direction in Elementary Differential Equations* The College Mathematics Journal vol 25, No 5, Nov. 1994

[5] Σ.Νεγρεπόντης - Σ.Γιωτόπουλος- Ε.Γιανακούλιας *Απειροστικός Λογισμός* Εκδ. Συμμετρία 1987,σελίς 297

[6] H. Edward Donley - Eliz Ann George *Hidden Behaviors in Graphs* Mathematics Teachers Journal vol86, No 5, Sept. 1993

[7] Α. Γαγάτσης - Γ. Θωμαΐδης *Λάθη των υποψηφίων καθηγητών των μαθηματικών σε ασκήσεις μαθητών.* Παιδαγωγική Επιθεώρηση 14-15/91