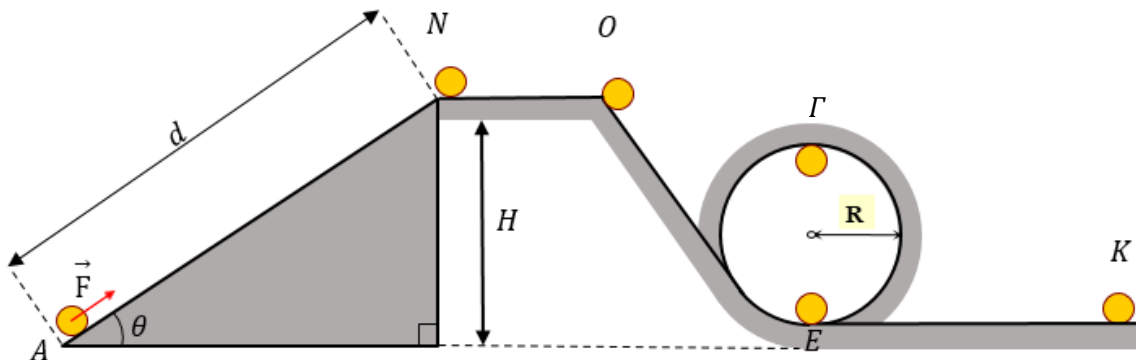


ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΣΚΗΣΗ ΜΗ ΟΜΑΛΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ



Σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ ξεκινάει από την ηρεμία να κινείται υπό την επίδραση σταθερής δύναμης F παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\theta=\pi/6\text{rad}$ που προσδίδει σταθερή επιτάχυνση $a=0,45\text{m/s}^2$. Το σώμα εμφανίζεται με το μη λείο δάπεδο τριβή με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = \sqrt{3}/6$. Φτάνοντας στο N, όπου βρίσκεται σε ύψος $H=5\text{m}$, εισέρχεται σε οριζόντιο επίπεδο όπου το διάνυσμα της ταχύτητας παραμένει σταθερό μέχρι το O. Από εκεί εισέρχεται σε λεία κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας $R=1,125\text{m}$. Αφού εκτελέσει μια περιστροφή εξέρχεται από τον κύκλο και συνεχίζει να κινείται μέχρι που σταματάει εξαιτίας τριβών στο σημείο K.

A) Να υπολογίσετε:

- Την ταχύτητα στο σημείο N.
- Την ταχύτητα στο σημείο Γ.
- Την ελάχιστη ταχύτητα στο Γ για να πραγματοποιηθεί η κίνηση.

B) Να περιγράψετε και να αιτιολογήσετε την κίνηση στον κύκλο.

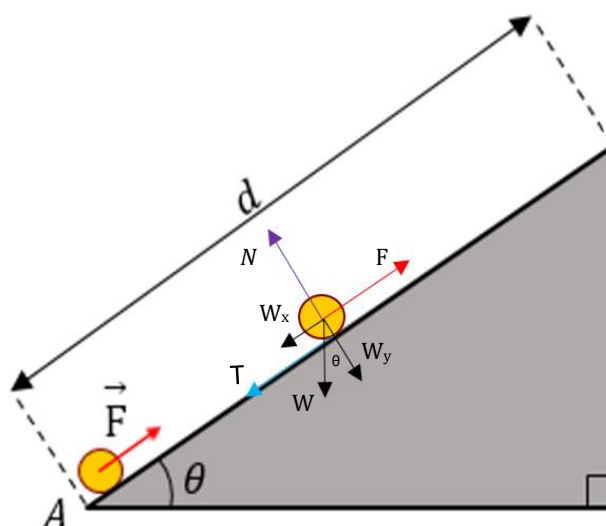
Γ) Να υπολογίσετε την θερμότητα που εκλύεται στο περιβάλλον από τη στιγμή που θα βγει από το κύκλο μέχρι το σημείο K.

Θεωρήστε ότι στα σημεία N,O δεν χάνεται η επαφή με το δάπεδο.

Δίνεται επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

A) Αρχικά θα πάρουμε μια τυχαία θέση στο κεκλιμένο επίπεδο και θα σχεδιάσουμε/αναλύσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. (όπως φαίνεται στο σχήμα)



Ξέρουμε από την εκφώνηση το ύψος του κεκλιμένου επιπέδου και την γωνία θ .

Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε από την τριγωνομετρία την υποτείνουσα του κεκλιμένου d .

Από το παραπάνω:

$$\sin(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{H}{d} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{d} \Rightarrow d = 10m$$

Για να δουλέψουμε με τις δυνάμεις στους άξονες x, y πρέπει να υπολογίσουμε τις δύο συνιστώσες του βάρους. Η γωνία θ μεταφέρεται ανάμεσα στη συνισταμένη του y και του βάρους μέσω της γεωμετρίας.

Άρα:

$$\sin(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{W_x}{W} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{W_x}{mg} \Rightarrow W_x = 10N$$

$$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{W_y}{W} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{W_y}{W} \Rightarrow W_y = 10\sqrt{3}N$$

Για να υπολογίσουμε την τριβή θα πρέπει να υπολογίσουμε την κάθετη αντίδραση του εδάφους N . Θα την υπολογίσουμε μέσω της συνισταμένης δύναμης στον άξονα y' . Εφόσον το σώμα ισορροπεί η συνισταμένη θα ισούται με 0.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - W_y = 0 \Rightarrow N = W_y \Rightarrow N = 10\sqrt{3}N$$

Αφού υπολογίσαμε την κάθετη αντίδραση του εδάφους και γνωρίζουμε από την εκφώνηση τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μ . Μπορούμε να υπολογίσουμε την τριβή.

$$T = \mu \cdot N \Rightarrow T = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 10\sqrt{3} \Rightarrow T = \frac{(\sqrt{3})^2 \cdot 10}{6} \Rightarrow T = \frac{3 \cdot 10}{6} \Rightarrow T = 5N$$

Γνωρίζοντας την επιτάχυνση, την μάζα και τις δύο δυνάμεις, μπορούμε να υπολογίσουμε την δύναμη F .

Στον άξονα x' ισχύει ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα.

Άρα:

$$\sum F_x = m \cdot a \Rightarrow F - T - W_x = m \cdot a \Rightarrow F = 2 \cdot 0,45 + 5 + 10 \Rightarrow F = 15,9N$$

Τώρα αφού γνωρίζουμε τα μέτρα των δυνάμεων και το μήκος d μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τα ενεργειακά θεωρήματα και να υπολογίσουμε την ταχύτητα στο N .

Επειδή δεν ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις δεν μπορούμε να πάρουμε Α.Δ.Μ.Ε.

Άρα θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.)

Τα έργα των W_y και N ισούνται με το μηδέν διότι είναι κάθετες στο διάνυσμα της μετατόπισης.

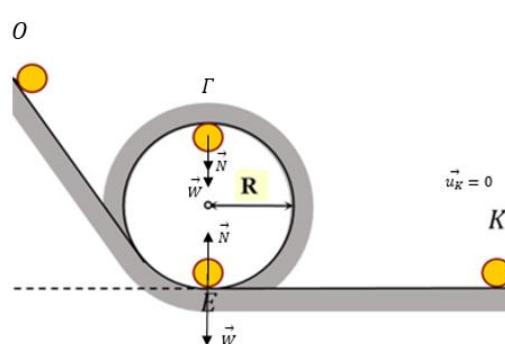
Θ.Μ.Κ.Ε. $A \rightarrow N$:

$$\begin{aligned} K_N - K_A &= W_T + W_{W_x} + W_{W_y} + W_F + W_N \Rightarrow K_N = -T \cdot d - W_x \cdot d + 0 + F \cdot d + 0 \\ &= d(F - T - W_x) = 10(15,9 - 10 - 5) = 10 \cdot 0,9 = 9 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot u_N^2 = 9 \\ &\Rightarrow u_N = \sqrt{9} \Rightarrow u_N = 3 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Στο οριζόντιο επίπεδο (NO) εφόσον το διάνυσμα της ταχύτητας παραμένει σταθερό το σώμα κάνει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση (Ε.Ο.Κ.). Άρα η ταχύτητα στο Ν θα είναι ίση με τη ταχύτητα στο Ο.

$$u_N = u_O = 3 \frac{m}{s}$$

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα στο Γ θα πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε την ταχύτητα στο Ε. Άρα θα εφαρμόσουμε ένα ενεργειακό θεώρημα και στην δικιά μας περίπτωση θα επιλέξουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. (ορίζουμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το κατώτερο σημείο Ε.



Θ.Μ.Κ.Ε. $O \rightarrow E$:

$$K_E - K_O = W_W + W_N \Rightarrow K_E = -\Delta U + K_O \Rightarrow K_E = U_O - U_E + K_O \Rightarrow K_E = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_O^2 \Rightarrow K_E = 109 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot u_E^2 = 109 \Rightarrow$$

$$u_E = \sqrt{109} \frac{m}{s}$$

Τώρα αφού ξέρουμε την ταχύτητα στο Ε μπορούμε να υπολογίσουμε και την ταχύτητα στο Γ, χρησιμοποιώντας Θ.Μ.Κ.Ε. (N που έχει έργο μηδέν επειδή είναι κάθετη στη μετατόπιση).

Θ.Μ.Κ.Ε. $E \rightarrow \Gamma$:

$$K_\Gamma - K_E = W_W + W_N \Rightarrow K_\Gamma = -\Delta U + 0 + K_E \Rightarrow K_\Gamma = U_E - U_\Gamma + K_E \Rightarrow K_\Gamma = -m \cdot g \cdot 2R + K_E \Rightarrow K_\Gamma = -2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 1,125 + 109 \Rightarrow K_\Gamma = 64 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot u_\Gamma^2 = 64 \Rightarrow u_\Gamma = \sqrt{64} \Rightarrow u_\Gamma = 8 \frac{m}{s}$$

Η ελάχιστη ταχύτητα θα υπολογιστεί από την σύνθεση δύο τύπων. Αρχικά θα πρέπει το σώμα να μην χάσει την επαφή με το έδαφος, άρα $N \geq 0$ (1)

Έπειτα αν πάρουμε τον τύπο της κεντρομόλου δύναμης στο ανώτερο σημείο και λύσουμε ως προς N θα προκύψει: $N = -m \cdot g + m \cdot \frac{u_r^2}{R}$ (2)

Από τις σχέσεις (1),(2):

$$-m \cdot g + m \cdot \frac{u_r^2}{R} \geq 0 \Rightarrow -20 + 2 \cdot \frac{u_r^2}{1,125} \geq 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_r \geq \sqrt{11,25} \frac{m}{s}$$

Άρα η ελάχιστη ταχύτητα για να πραγματοποιηθεί η κίνηση είναι:

$$u_{r_{min}} = \sqrt{11,25} \frac{m}{s}$$

Β) Η κίνηση στον κύκλο είναι μια μη ομαλή κυκλική κίνηση διότι το μέτρο της ταχύτητας δεν παραμένει σταθερό. $u_E \neq u_r$

Γ) Για να υπολογίσουμε την θερμότητα που εκλύεται στο περιβάλλον από το Ε έως το Κ, αρκεί να υπολογίσουμε το έργο της τριβής από το Ε έως το Κ. Για να υπολογίσουμε το έργο της τριβής θα χρησιμοποιήσουμε Θ.Μ.Κ.Ε. (το έργο του βάρους και της κάθετης αντίδρασης είναι μηδέν διότι και τα δύο είναι κάθετα στο διάνυσμα της μετατόπισης).

Η κινητική ενέργεια στο Κ είναι μηδέν διότι η ταχύτητα είναι μηδέν.

Θ.Μ.Κ.Ε. $E \rightarrow K$:

$$K_K - K_E = W_W + W_T \Rightarrow 0 - 109 = 0 + W_T \Rightarrow W_T = -109 \Rightarrow |W_T| = 109 J$$

$$|W_T| = Q = 109 J$$