Πλάτος και ενέργεια στη φθίνουσα ταλάντωση.

Περίμενα και άλλες τοποθετήσεις ή αντιρρήσεις στα προηγούμενα που έγραψα, αλλά δεν βλέπω να έρχονται. Στέργιο, απολύτως κατανοητό αυτό που λες και σε ευχαριστώ που το κατέθεσες.

Οπότε, για να μην μένει η συζήτηση στη μέση, αφού πιθανόν να διαβαστεί από κάποιους φίλους αργότερα, επιστρέφοντας από τις διακοπές τους, ας συνεχίσω, έστω μονολογώντας…

Ενώ θα πρέπει να διδαχτούν γενικά οι φθίνουσες ταλαντώσεις, όπως παραπάνω εξηγήθηκε, η αναλυτική μελέτη, αναγκαστικά περιορίζεται στην περίπτωση της επίδρασης δύναμης απόσβεσης της μορφής $F=-bυ$.

Ποια είναι η εξίσωση της κίνησης στην ειδική αυτή περίπτωση φθίνουσας ταλάντωσης; Το σχολικό βιβλίο δεν την δίνει. Συνεπώς δεν υπάρχει και καμιά ανάγκη να διδαχτεί καμιά εξίσωση κίνησης. Άλλωστε στην προηγούμενη συζήτηση έγινε φανερό, ότι η εξίσωση κίνησης, μπορεί να πάρει διαφορετικές μορφές, ανάλογα με το ποια στοιχεία κάποιος θέλει να τονίσει. Και, προσοχή συνάδελφοι, αυτό δεν είναι πρωτοφανές: Αλήθεια μήπως στην γνωστή μας ΑΑΤ η εξίσωση κίνησης μπορεί να γραφτεί:

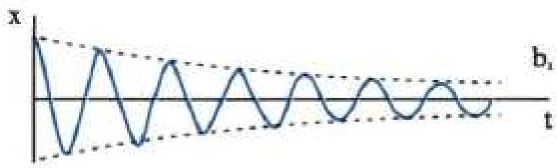
$$x(t)=(υ_0/ω)\cdot ημωt+ x(0)\cdot συνωt$$

Αν κάποιος δουλέψει με την παραπάνω εξίσωση θα έχει κάνει κάποιο λάθος; Προφανώς όχι. Γιατί όμως δεν το κάνουμε; Γιατί στο σχολικό βιβλίο μας έχει δοθεί μια συγκεκριμένη άλλη εξίσωση, η $x=A\cdot ημ(ωt+φ_0)$ και αυτήν διδάσκουμε.

Στην φθίνουσα όμως, το σχολικό δεν έχει δώσει **ΚΑΜΙΑ** εξίσωση κίνησης και δεν υπάρχει κανένας λόγος να θεωρήσουμε, διδάσκοντας το μάθημα, ότι είναι γνωστή, είναι μια και μοναδική, και, με βάση αυτή θα πρέπει να διδάξουμε.

Η συνέχεια με κλικ στο pdf.

Το βιβλίο δίνει απλά την εξίσωση μεταβολής του «πλάτους» $A=A_0\cdot e^{-Λt}$ και χαράσσει και το διάγραμμα

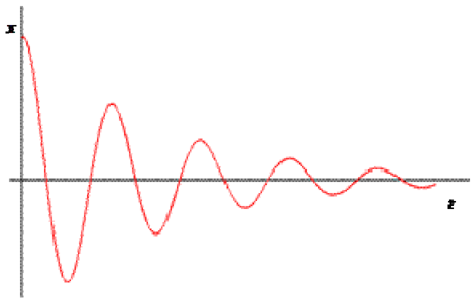


Χωρίς να λέει αν αυτή η διακεκομμένη γραμμή, η οποία αναφέρεται στη φθίνουσα ταλάντωση, που ένα σώμα εκτρέπεται κατά d (και όπου στο βιβλίο συμβολίζεται με A_0) από την θέση ισορροπίας του και τη στιγμή t=0, αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί, είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=d\cdot e^{-Λt}$ ή η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=(ω_0/ω)d\cdot e^{-Λt}$ (και των συμμετρικών τους).

Αν είναι η πρώτη περίπτωση, τότε η εκθετική περνά από τις θέσεις με μέγιστες απομακρύνσεις, από τις θέσεις πλάτους. Αν είναι η δεύτερη, τότε είναι η περιβάλλουσα και εφάπτεται της καμπύλης σε σημεία άλλα και όχι στις θέσεις που μηδενίζεται η ταχύτητα.

Αλλά, πάνω στο θέμα αυτό, είχα γράψει πριν λίγες μέρες:

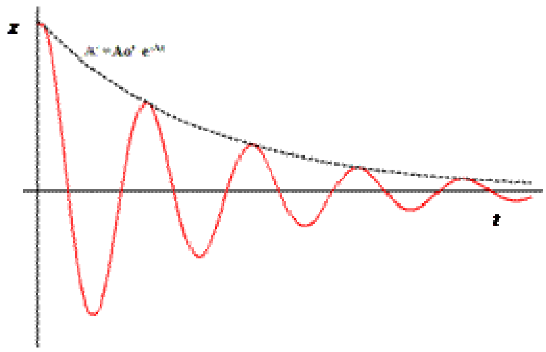
«Και αν κάνουμε τη γραφική παράσταση του x(t), πράγμα που έχει φυσική αξία, θα πάρουμε τη μορφή:



Η καμπύλη είναι αυτή, με όποια μορφή και να γράψεις τη συνάρτηση x(t). Και αυτό είναι το φαινόμενο που μελετάμε.

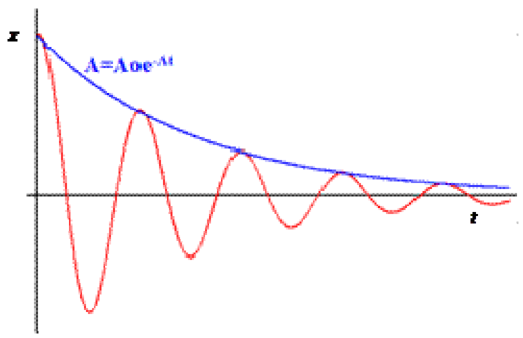
Θέλουμε να κάνουμε παραπέρα σχόλια, μελέτη ή να μιλήσουμε για πλάτη;

Ο Θρασύβουλος σχεδιάζει ταυτόχρονα τη γραφική παράσταση της περιβάλλουσας $A΄=A_0΄\cdot e^{-\Lambda t}$και παίρνει την εικόνα:



Η περιβάλλουσα αυτή εφάπτεται της γραφικής παράστασης στις θέσεις μέγιστης απομάκρυνσης; ΌΧΙ! Εφάπτεται στην καμπύλη σε άλλο σημείο δεξιά των θέσεων όπου η ταχύτητα μηδενίζεται. Είναι απόλυτα σωστός.

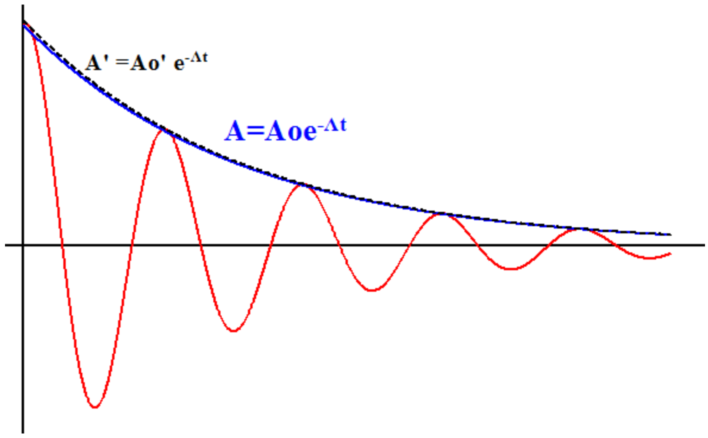
Ο Διονύσης, σχεδιάζει ταυτόχρονα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $A=A_o\cdot e^{-\Lambda t}$ την οποία ονομάζει «πλάτος» και παίρνει τη μορφή:



Τώρα η καμπύλη της εκθετικής περνά από τα σημεία με μέγιστη απομάκρυνση, θέσεις πλάτους, χωρίς βέβαια να εφάπτεται της γραφικής παράστασης x(t). Είναι σωστός;

Και βέβαια είναι.

Και αν εγώ θελήσω στη γραφική παράσταση να βάλω και τις δύο παραπάνω καμπύλες, θα πάρω:



Όπου με μαύρο χρώμα είναι η περιβάλλουσα και με μπλε η εκθετική του πλάτους».

Νομίζω ότι κατά τη διδασκαλία μας, δεν υπάρχει κανένας λόγος να μπούμε σε αυτές τις πολύ λεπτές διαφορές. Δεν αφορούν τα παιδιά, ούτε μπορούμε να εμβαθύνουμε σε τέτοιο σημείο. Το βιβλίο μιλάει για πλάτος και πλάτος πρέπει να παραμείνει. Και η καμπύλη μπορεί να δείχνει τα σημεία πάνω στα οποία η απομάκρυνση γίνεται μέγιστη, αλλά με μια σημαντική επισήμανση.

Η εξίσωση $A=A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$ δείχνει τις τιμές του πλάτους για χρονικές στιγμές t=nT και όχι για κάθε χρονική στιγμή. Θα μπορούσαμε να γράψουμε $A=A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot nT}$, όπου A_0 το αρχικό πλάτος και T η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης.

Αν αυτό το τονίσουμε, τότε αυτομάτως και η ενέργεια θα δίνεται από την εξίσωση $E=E_0 \cdot e^{-2\Lambda \cdot nT}$ για τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές, που το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα και θετικές μέγιστες απομακρύνσεις.

Αλλά τότε είμαστε υποχρεωμένοι να τονίσουμε, ότι **για κάθε άλλη χρονική στιγμή** δεν ισχύουν οι παραπάνω εξισώσεις, αφού:

1) Η ενέργεια ταλάντωσης μια τυχαία στιγμή είναι ίση:

$$E= \tfrac{1}{2} Dx^2 + \tfrac{1}{2} mv^2.$$

Όπου ο πρώτος προσθετέος, δίνει τη δυναμική ενέργεια που συνδέεται με τη δύναμη επαναφοράς και ο δεύτερος, τη γνωστή μας κινητική ενέργεια

2) Το «πλάτος» θα μπορούσε να υπολογιστεί αν θεωρούσαμε ότι «εξαφανίζοντας» τις αποσβέσεις στη θέση αυτή, το σώμα θα εκτελούσε πλέον ΑΑΤ, οπότε η ενέργεια που υπολογίσαμε παραπάνω, θα ήταν ίση και με $\tfrac{1}{2} DA^2$, δηλαδή γράφοντας:

$$\tfrac{1}{2} DA^2=\tfrac{1}{2} Dx^2 + \tfrac{1}{2} mv^2.$$

(Η αλήθεια βέβαια είναι και τι έγινε το να μπορεί ένας μαθητής να υπολογίζει το παραπάνω πλάτος;
Τι ακριβώς του λέει; Ποια φυσική πραγματικότητα εκφράζει; Αλλά τέλος πάντων…)

Προφανώς στην παραπάνω πρόταση δεν ανέφερα τίποτα για προσεγγίσεις. Ούτε για μέσες τιμές ενέργειας, ούτε για το πόσο σφάλμα κάνουμε στη μια ή στην άλλη περίπτωση. Οι μαθητές μας δεν μπορούν να αντιμετωπίσουν πρόβλημα με προσεγγίσεις, που άλλες φορές θα πρέπει να ληφθούν υπόψη και άλλες όχι.

Κατά συνέπεια δεν είναι λογικό, σε καμιά περίπτωση, να εμπλέξουμε τους μαθητές μας σε προβλήματα που εμπλέκονται εξισώσεις κίνησης και μάλιστα με «δανεικούς» από την ΑΑΤ, όρους, θεωρώντας αυτονόητα πράγματα, τα οποία δεν ισχύουν. Ούτε εφαρμόζοντας προεκτάσεις που μπορούν να ισχύουν, κάτω από συγκεκριμένους περιορισμούς, να οδηγούμαστε σε δρόμους που οδηγούν σε αντιφάσεις εξόφθαλμες, «καταστρέφοντας» σημαντικές γνώσεις, τις οποίες πρέπει να κρατήσουν οι μαθητές μας.

Για παράδειγμα είναι σημαντικό να μπορεί ένας μαθητής να εφαρμόσει το 2^o νόμο του Νεύτωνα για να υπολογίσει κάποιο ζητούμενο (και ας μην μπορεί να λύσει τη …διαφορική). Ας πούμε, ξέροντας την ταχύτητα στη θέση x=0, να μπορεί να βρει την επιτάχυνση και να μην πει ότι είναι μηδενική!

Αλλά θα πρέπει επίσης να ξέρει ότι η ταλάντωση είναι φθίνουσα και η ενέργεια μειώνεται και υπεύθυνη για την μείωση αυτή, είναι η δύναμη απόσβεσης. Οπότε θα κατανοεί ότι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας, σε κάθε θέση θα είναι $\frac{dE}{dt}=-|F_{απ}|\cdot|υ|$ (όπου το (–) σημαίνει μείωση) και προφανώς στην ακραία θέση όπου μηδενίζονται και η δύναμη και η ταχύτητα, ο ρυθμός αυτός είναι μηδενικός…

Δεν θα του έχουμε διδάξει τη σχέση $E=E_0\cdot e^{-Λt}$, οπότε σε κάθε θέση θα υπάρχει και ένας (μη μηδενικός) ρυθμός μεταβολής της ενέργειας…

dmargaris@gmail.gr