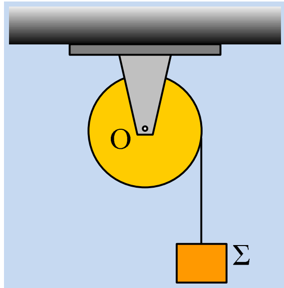
Ένα Β΄ θέμα με τροχαλία.



Στο διπλανό σχήμα αφήνουμε το σώμα Σ μάζας m να κινηθεί, δεμένο στο άκρο ενός μη εκτατού νήματος, το οποίο είναι τυλιγμένο σε τροχαλία μάζας M=2m. Η τροχαλία μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο της Ο.

i) Η δύναμη που ασκεί ο άξονας στην τροχαλία έχει μέτρο:

α) F= 0,75 Mg, β) F= Mg, γ) F=1,25Mg, δ) F= 1,5 Mg.

ii) Αν x ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας και y ο αντίστοιχος ρυθμός του συστήματος τροχαλία-σώμα Σ, ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας, θα ισχύει:

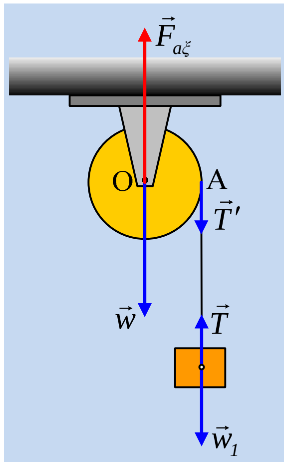
α) y=x, β) y=1,5x, γ) y=2x , δ) y=2,5x.

iii) Τη στιγμή που το σώμα Σ έχει κατέλθει κατά h, έχει κινητική ενέργεια:

$$\alpha)\ K=\frac{1}{3}mgh,\quad \beta)\ K=\frac{1}{2}mgh,\quad \gamma)\ K=\frac{2}{3}mgh,\quad \delta)\ K=mgh.$$

Για την τροχαλία ως προς τον άξονα περιστροφής της Ι= ½ MR^2.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, όπου Τ η τάση του νήματος που ασκείται στο σώμα Σ και Τ΄=Τ (αφού το νήμα είναι αβαρές) η τάση του νήματος που ασκείται στην τροχαλία.

i) Το σώμα Σ επιταχύνεται προς τα κάτω, οπότε:

$$\Sigma F=m\cdot\alpha \rightarrow mg-T=m\cdot\alpha \ (1)$$

Η τροχαλία επιταχύνεται στροφικά:

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T'\cdot R=\tfrac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T'=\tfrac{1}{2}MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\ (2)$$

Όμως το σημείο Α, που το νήμα εφάπτεται της τροχαλίας, έχει ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του σώματος, αλλά και ίση με την γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας:

$$\upsilon_\Sigma=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R \rightarrow a_\Sigma=a=\frac{d\upsilon_\Sigma}{dt}=\frac{d(\omega R)}{dt}=\frac{d\omega}{dt}R=a_{\gamma\omega\nu}R \quad (3)$$

οπότε με πρόσθεση των (1) και (2), λαμβάνοντας υπόψη μας και την σχέση (3) παίρνουμε:

$$mg=(m+\tfrac{1}{2}M)\cdot\alpha \rightarrow$$

$$a=\frac{mg}{m+{}^1\!/_2 M}=\frac{mg}{m+m}=\frac{g}{2}$$

Η τροχαλία όμως ισορροπεί μεταφορικά οπότε:

$$\Sigma F=0 \text{ ή } F_{\alpha\xi}-w-T'=0 \rightarrow$$

$$F_{\alpha\xi}=Mg+T=Mg+ ½\, M\cdot\alpha= Mg+\frac{1}{4}Mg=1{,}25Mg$$

Σωστή η γ) πρόταση.

ii) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας ως προς το Ο (κάθετος στο επίπεδο με φορά προς τα μέσα), είναι:

$$x=\frac{dL_\tau}{dt}=\Sigma\tau=T'\cdot R=\frac{1}{2}Ma\cdot R=m\frac{g}{2}R=\frac{1}{2}mgR$$

Ο αντίστοιχος ρυθμός για το σύστημα είναι:

$$y=\frac{dL_{o\lambda}}{dt}=\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=mgR=2x$$

Σωστή η γ) πρόταση.

iii) Κάθε στιγμή ο λόγος της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ προς την κινητική ενέργεια της τροχαλίας είναι ίσος:

$$\frac{K_\Sigma}{K_\tau}=\frac{\frac{1}{2}m\upsilon^2}{\frac{1}{2}I\omega^2}=\frac{m\upsilon^2}{\frac{1}{2}MR^2\omega^2}=\frac{m\upsilon^2}{\frac{1}{2}2m\upsilon^2}=1$$

Οπότε αφού η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται:

$$U_{\alpha\rho\chi}+K_{\alpha\rho\chi}=U_{\tau\varepsilon\lambda}+K_{\Sigma/\tau\varepsilon\lambda}+K_{\tau/\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow$$

$$U_{\alpha\rho\chi}-U_{\tau\varepsilon\lambda}=K_{\Sigma/\tau\varepsilon\lambda}+K_{\tau/\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow$$

$$mgh=2\cdot K_\Sigma \text{ ή}$$

$$K_\Sigma=K=\frac{1}{2}mgh$$

Σωστή η β) πρόταση.

dmargaris@sch.gr