Μελέτη μη αρμονικής ταλάντωσης

Τερλεμές Σπύρος
spyrosssterlemes@gmail.com
29-12-2020

Έστω ότι ένα σώμα μάζας m δέχεται δύναμη της μορφής $-Dr^n$ όπου D>0. Τότε οποιαδήποτε τιμή και να έχει το n σημαίνει ότι το σώμα θα εκτελεί ένα είδος ταλάντωσης, αφού η δύναμη θα είναι συνεχώς προς την θέση ισορροπίας (r=0). Στην ανάρτηση βρίσκω μια γενικότερη έκφραση της περιόδου της ταλάντωσης. Έχουμε αρχικά ότι:

$$m\ddot{r} = -Dr^n$$

(1)

Πολλαπλασιάζουμε με $\dot{x}$ και προκύπτει:

$$m\ddot{r}\dot{r} = -Dr^n\dot{r} \Longrightarrow m\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{dr}{dt} = -Dr^n\frac{dr}{dt} \Longrightarrow m\frac{dr}{dt}d\left(\frac{dr}{dt}\right) = -Dr^n dr$$

(2)

Ολοκληρώνουμε την (2) και έχουμε:

$$m\int\frac{dr}{dt}d\left(\frac{dr}{dt}\right) = -D\int r^n\,dr + C \Longrightarrow \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{D}{n+1}r^{n+1} + C$$

(3)

Παρατηρούμε τώρα ότι αν αναδιατάξουμε την σχέση (3) προκύπτει:

$$C = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{D}{n+1}r^{n+1}$$

(4)

Ο πρώτος όρος είναι η κινητική ενέργεια και ο δεύτερος όρος είναι το ολοκλήρωμα της δύναμης, άρα το δυναμικό (δυναμική ενέργεια). Οπότε είναι:

$$C = K + V(r) \Longrightarrow C = E$$

(5)

Δηλαδή η σταθερά C εκφράζει την ενέργεια του συστήματος. Καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Από την (4) έχουμε ότι:

$$C = E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2 + \frac{D}{n+1}r_0^{n+1}$$

(6)

Επανερχόμαστε στην σχέση (4) και λύνουμε ως προς την ταχύτητα:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2\left(E - \frac{D}{n+1} r^{n+1}\right)}{m}}$$

(7)

Οπότε αν θέλουμε να κάνουμε μια προσέγγιση της περιόδου, θα πρέπει να ολοκληρώσουμε τον χρόνο από 0 έως T/4. Αλλά σε αυτό το χρονικό διάστημα το σώμα θα έχει πάει από την θέση 0 στην μέγιστη απομάκρυνση Α. Δηλαδή από την (7):

$$\frac{T}{4} = \int_0^A \sqrt{\frac{m}{2\left(E - \frac{D}{n+1} r^{n+1}\right)}} dr$$

(8)

Άρα τελικά η περίοδος μπορεί να γραφτεί ως:

$$T = \sqrt{8m} \int_0^A \frac{1}{\sqrt{E - \frac{D}{n+1} r^{n+1}}} dr = \sqrt{8m} \int_0^A \frac{1}{\sqrt{E - V(r)}} dr$$

(9)

Το πλάτος Α καθορίζεται από την σχέση (4). Δηλαδή αν προχωρήσουμε συναρτήσει της ενέργειας Ε (που θεωρούμε καθορισμένη και γνωστή από τις αρχικές συνθήκες) έχουμε ότι:

$$E = K + V(r) \Rightarrow E = V(A) = \frac{D}{n+1} A^{n+1} \Rightarrow A = \left[\frac{E(n+1)}{D}\right]^{\frac{1}{n+1}}$$

(10)

Έτσι σύμφωνα με την σχέση (9) η περίοδος μπορεί τώρα να γραφτεί:

$$T = \sqrt{8m} \int_0^A \frac{1}{\sqrt{\frac{D}{n+1} A^{n+1} - \frac{D}{n+1} r^{n+1}}} dr$$

(11)

Θέτουμε $r = Aw$ άρα:

$$T = \sqrt{\frac{8m(n+1)}{DA^{n-1}}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - w^{n+1}}} dw$$

(12)

Από την σχέση (12) μπορούμε να συμπεράνουμε το εξής σημαντικό. Αν $n-1\neq 0$ τότε η περίοδος εξαρτάται από το πλάτος. Η μόνη περίπτωση να εξαφανιστεί το πλάτος από τον τύπο (12) είναι αν n=1 (δηλαδή η περίπτωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης). Τότε:

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{D}}\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}dw$$

(13)

Θέτουμε $w = sinu$ και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}cosudu = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}du = \frac{\pi}{2}$$

(14)

Οπότε από την σχέση (13):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

(15)

Αυτό επιβεβαιώνει ότι η σχέση (12) είναι σωστή. Άρα έχουμε καταλήξει ότι η περίοδος για κάθε είδους ταλάντωση (με δύναμη επαναφοράς της μορφής $-Dr^n$) δίνεται από:

$$T = \sqrt{\frac{8m(n+1)}{DA^{n-1}}}\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-w^{n-1}}}dw$$

(16)

Η μοναδική λοιπόν περίπτωση ταλάντωσης που η περίοδος είναι ανεξάρτητη του πλάτους Α είναι η ΑΑΤ.