Δυναμικό εξαρτώμενο της ταχύτητας και του χρόνου

Τερλεμές Σπύρος
spyrosssterlemes@gmail.com
21-2-2021

Στην φυσική χωρίζουμε τις δυνάμεις, σε διατηρητικές και μη διατηρητικές ανάλογα με το αν το πεδίο στο οποίο ανήκουν είναι διατηρητικό ή όχι. Ο γνωστός ορισμός μιας διατηρητικής δύναμης είναι πως ο στροβιλισμός της πρέπει να είναι μηδενικός. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει μια συνάρτηση δυναμικού, τέτοια ώστε το αρνητικό grad της να δίνει την ίδια την δύναμη ($\vec{F} = -\vec{\nabla}V$). Αν η δύναμη εξαρτάται μόνο από τις γενικευμένες χωρικές συντεταγμένες και τον χρόνο, τότε η συνάρτηση δυναμικού μπορεί να βρεθεί ολοκληρώνοντας τον ορισμό. Αν όμως έχουμε μια δύναμη που εξαρτάται από την ταχύτητα (όπως για παράδειγμα μια αποσβεστική δύναμη), τότε υπό προϋποθέσεις, πάλι μπορεί να οριστεί δυναμικό. Το πρόβλημα όμως είναι ότι αν κάποια δύναμη δεν μπορεί να περιγράφει από δυναμικό, τότε οι συνηθισμένες εξισώσεις Euler-Lagrange, δίνουν λάθος διαφορικές. Παρακάτω εξετάζω περιπτώσεις που το δυναμικό εξαρτάται από τον χρόνο και την ταχύτητα, και επιδιώκω να διαμορφώσω μια «νέα» γενικευμένη μορφή των Euler-Lagrange.

Χρονικά εξαρτώμενο δυναμικό

Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση δυναμικού που εξαρτάται εκπεφρασμένα από τον χρόνο, δηλαδή $V = V(\vec{r}, t)$. Τότε όταν πάρουμε το grad της, το χρονικό μέλος θα παραμείνει αναλλοίωτο, άρα πράγματι θα μπορεί να εκφράζει μια δύναμη, η οποία θα είναι χωροχρονοεξαρτώμενη. Για κάθε γενικευμένη συντεταγμένη δηλαδή έχουμε ότι ο όρος:

$$\frac{\partial V(\{x_i\}, t)}{\partial x_i}$$

υπολογίζεται για t σταθερό, άρα ο χρόνος αντιμετωπίζεται σαν αριθμός. Έτσι λοιπόν υπάρχει συνάρτηση $V(\vec{r}, t)$ ώστε:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}, t)$$

(1)

Αυτό σημαίνει ότι κάθε δύναμη που εξαρτάται μόνο από την θέση και εκπεφρασμένα τον χρόνο, μπορεί να περιγραφτεί από μια συνάρτηση δυναμικού. Δηλαδή η συνάρτηση $V(x, t) = x^2t^2$ εκφράζει την δύναμη $F = -2xt^2$.

Όταν όμως το δυναμικό εξαρτάται από τον χρόνο, τότε και η συνάρτηση Lagrange εξαρτάται εκπεφρασμένα από τον χρόνο. Άρα:

$$\frac{dH(\{x_i\},\{p_i\},t)}{dt} = \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{L}(\{x_i\},\{\dot{x}_i\},t)}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \Longrightarrow \frac{dH}{dt} \neq 0$$

(2)

Αυτό σημαίνει ότι η Hamiltonian δεν είναι ολοκλήρωμα κίνησης, άρα η ενέργεια δεν διατηρείται σταθερή. Έτσι η Hamiltonian δεν θα εκφράζει την ενέργεια συστήματος. Με άλλα λόγια η Hamiltonian θα είναι:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i\, p_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i\, p_i - T + V(\vec{r},t) \neq E$$

(3)

Αυτό σημαίνει ότι δεν ικανοποιείται η συνθήκη των αγκύλων Poisson, δηλαδή:

$$\{H,\varphi\} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \neq 0$$

(4)

παρόλο που οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν από τις Euler-Lagrange πρώτου είδους. Με άλλα λόγια είναι σωστό το να εκφράσουμε τις διαφορικές κίνησης για ένα δυναμικό που εξαρτάται μόνο από την θέση και το χρόνο, μέσα από τις σχέσεις:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\right) = 0$$

Δυναμικό εξαρτώμενο της ταχύτητας

Έστω ότι έχουμε μια δύναμη που στην γενικότερη περίπτωση εξαρτάται από την ταχύτητα, την θέση και τον χρόνο. Τότε ουσιαστικά αναζητούμε συνάρτηση V τέτοια ώστε:

$$\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

(5)

Όπως και προηγουμένως, λόγω της μερικής παραγώγου, μια τέτοια συνάρτηση υπάρχει. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange όμως έχουν οριστεί με το δυναμικό ανεξάρτητο της ταχύτητας. Σε αυτήν την περίπτωση χρειάζεται μια αναδιάταξη της έννοιας του δυναμικού στην περίπτωση που εξαρτάται από την ταχύτητα. Έστω ότι ορίζουμε το ολοκλήρωμα δράσης ως:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - V(\{x_i\},\{\dot{x}_i\},t))dt$$

(6)

Όπου η συνάρτηση V δεν έχει οριστεί ακόμα. Θέλουμε όταν κάνουμε το ολοκλήρωμα στάσιμο, οι Euler-Lagrange να μας δίνουν τους νόμους του Νεύτωνα. Έχουμε:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0$$
$$\Rightarrow -m\ddot{x}_i - \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0$$

(7)

Άρα λοιπόν καταλήγουμε στην έκφραση:

$$F_{x_i} = -\frac{\partial V(\{x_i\},\{\dot{x}_i\},t)}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V(\{x_i\},\{\dot{x}_i\},t}{\partial \dot{x}_i}\right)$$
$$F_{x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$$

(8)

Δηλαδή, η συνάρτηση V θα πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να ικανοποιεί την σχέση (8) για κάθε γενικευμένη συντεταγμένη. Αν ορίσουμε λοιπόν το δυναμικό, από την σχέση (8), τότε γενικεύουμε σε ένα ευρύτερο σύνολο δυνάμεων, που υπό κατάλληλες συνθήκες μπορεί να εμπεριέχει και δυνάμεις εξαρτώμενες της ταχύτητας. Σημαντικό είναι ότι για ακόμα μια φορά οι αγκύλες Poisson δίνουν:

$$\{f,H\} + \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} \neq 0$$

(9)

Δηλαδή ούτε στην περίπτωση που το δυναμικό εξαρτάται από την ταχύτητα, παραμένει σταθερή η Hamiltonian, άρα δεν είναι ολοκλήρωμα κίνησης. Για να βρεθεί η συνάρτηση V πρέπει να λυθεί η εξίσωση (8), με τις σταθερές να καθορίζονται μέσα από τις δυνάμεις στις γενικευμένες συντεταγμένες. Η επίλυση της (8) προϋποθέτει την ύπαρξη τέτοιας συνάρτησης V. Συνήθως με variation theory μπορούμε να βρούμε αν για μια συγκεκριμένη δύναμη, η (8) δεν επιλύεται. Για παράδειγμα μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν έχουμε μια δύναμη απόσβεσης της μορφής $-\upsilon^2$ τότε δεν υπάρχει συνάρτηση V που να ικανοποιεί την (8). Σε τέτοιες περιπτώσεις, ορίζουμε την Lagragian μέσα από την συνάρτηση V που εκφράζει τις δυνάμεις αυτές που μπορούν να περιγραφούν μέσω της (8), δηλαδή:

$$\mathcal{L} = T - V(\{x_i\},\{\dot{x}_i\},t) = T - V$$

(10)

Με την V να περιγράφει τις δυνάμεις που δίνουν την (8). Έστω ότι ορίζουμε Q_i την συνισταμένη των δυνάμεων στην γενικευμένη συντεταγμένη x_i, που δεν ικανοποιούν την (8) και F_i την συνισταμένη των δυνάμεων που ικανοποιούν την (8). Τότε:

$$m\ddot{x}_i = Q_i + F_i = Q_i - \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)$$

Έτσι η παραπάνω εξίσωση αναδιατάσσεται στην γενικευμένη μορφή των εξισώσεων Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = Q_i - \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = Q_i \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}(T-V) = Q_i \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = Q_i$$

(11)

Η εξίσωση (11) δίνει την γενικευμένη μορφή των εξισώσεων Euler-Lagrange.

Μορφή της Hamiltonian

Αν κρατήσουμε τον ορισμό της γενικευμένης ορμής σταθερό, τότε, η Hamiltonian του συστήματος θα αλλάξει σε σχέση με την κλασική μορφή. Δηλαδή, έστω η ορμή:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}$$

(12)

Τότε από την σχέση (11) έχουμε:

$$\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \dot{p}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = Q_i$$

(13)

Άρα παραγωγίζοντας την συνάρτηση Lagrange ως προς τον χρόνο:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\frac{d\dot{x}_i}{dt}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(\dot{p}_i\,\dot{x}_i - Q_i\dot{x}_i + p_i\ddot{x}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$
$$= \frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^{n} p_i\,\dot{x}_i) - \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{x}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

(14)

Ορίζουμε την συνάρτηση Hamilton ως:

$$H(\{x_i\},\{p_i\},t) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,\dot{x}_i - \mathcal{L}$$

(15)

Τότε αντικαθιστώντας στην σχέση (14) παίρνουμε:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} Q_i\,\dot{x}_i$$

(16)

Παρατηρούμε δηλαδή ότι έχουμε έναν νέο όρο, το άθροισμα των γινομένων δύναμης και γενικευμένης ταχύτητας. Άρα σε αυτή την περίπτωση δεν αρκεί η Lagragian να μην είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου, ώστε η συνάρτηση Hamilton να παριστάνει την ενέργεια. Αν θέλουμε την Hamiltonian να είναι ολοκλήρωμα κίνησης (ενέργεια) τότε πρέπει στην γενική περίπτωση να ισχύει:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

(16)

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση που η συνάρτηση Lagrange δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου, η ενέργεια μπορεί να διατηρείται, με την προϋπόθεση ότι επιδρούν συγκεκριμένου είδους δυνάμεις που ικανοποιούν την (16).

Έτσι, αν ένα (ή παραπάνω) σώμα δέχεται οποιουδήποτε είδους δυνάμεις, η κίνηση του μπορεί να περιγραφτεί μέσω των συναρτήσεων Lagrange και Hamilton.