

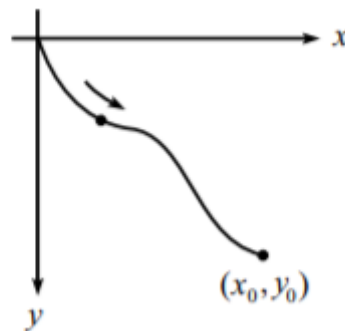
Τροχιά σωματιδίου για ελαχιστοποίηση χρόνου

Τερλεμές Σπύρος

spyrosssterlemes@gmail.com

26-2-2021

Έστω ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xOy και ένα σωματίδιο που αρχικά βρίσκεται στο O . Το σωματίδιο κινείται σε μια τυχαία τροχιά όπως στο σχήμα, η οποία θέλουμε να είναι τέτοια ώστε ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει στο τέλος της τροχιάς να είναι ελάχιστος. Η επίδραση της βαρύτητας είναι σταθερή.



ΕΛΑΧΙΣΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ

Ανεξάρτητα της τροχιάς του σωματιδίου, η ταχύτητα του σώματος σε κάθε θέση είναι σταθερή και ίση με $\sqrt{2gy}$. Αυτό μπορεί ναδειχθεί άμεσα ενεργειακά, αφού:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(\vec{r}) = C \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

(1)

$$v = \sqrt{2gy}$$

(2)

Ο χρόνος t που απαιτείται για να καλύψει το σώμα την τροχιά του είναι προφανώς:

$$t = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{\sqrt{2gy}} = \int_0^x \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dy$$

(3)

Θέλουμε τον ελάχιστο δυνατό χρόνο, άρα θέλουμε να κάνουμε στάσιμο το ολοκλήρωμα. Αν θέσουμε όπου x το t και όπου y το q (γενικευμένη συντεταγμένη) τότε έχουμε το ολοκλήρωμα της δράσης. Άρα εδώ με αντίστοιχο συλλογισμό έχουμε

την «δράση» $\mathcal{A} = \sqrt{2gt}$, και την συνάρτηση $\mathcal{W}(y, \dot{y})$ ίση με την ολοκληρωτέα ως προς x ποσότητα. Δηλαδή το ολοκλήρωμα της δράσης είναι:

$$\mathcal{A} = \int_0^x W(y(x), \dot{y}(x)) dx = \int_0^x W(y, \dot{y}) dx$$

ΕΛΑΧΙΣΤΗ «ΔΡΑΣΗ» $\mathcal{A}$

Αν χρησιμοποιήσουμε την variation theory θα πάρουμε τις συνθήκες ελαχιστοποίησης του ολοκληρώματος ($\delta\mathcal{A} = 0$). Αυτές θα αντιστοιχούν στην μετασχηματισμένες εξισώσεις Euler-Lagrange και θα έχουμε άρα:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial W(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial W(y, \dot{y})}{\partial y} = 0$$

(4)

Θα «σπάσουμε» την εξίσωση υπολογίζοντας κάθε μια παράγωγο ξεχωριστά και στο τέλος αντικαθιστώντας θα έχουμε την ζητούμενη διαφορική.

- Υπολογισμός της $\partial W / \partial y$

Έχουμε ότι:

$$\frac{\partial W(y, \dot{y})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} \right) = \sqrt{1 + y'^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \right) = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} \sqrt{1 + y'^2}$$

(5)

- Υπολογισμός της $\partial W / \partial \dot{y}$

Έχουμε ότι:

$$\frac{\partial W(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} (\sqrt{1 + y'^2}) = y^{-\frac{1}{2}} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

(6)

- Υπολογισμός της $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{y}} \right)$

Έχουμε ότι:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial W(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{d}{dx} \left(y^{-\frac{1}{2}} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = \frac{d}{dy} \left(y^{-\frac{1}{2}} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) y'$$

Αλλά είναι:

$$\frac{d}{dy} \left(y^{-\frac{1}{2}} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + y^{-\frac{1}{2}} \frac{y''}{y'(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Έτσι τελικά έχουμε:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial W(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{2y\ddot{y} - \dot{y}^2(1 + \dot{y}^2)}{2\dot{y}^{\frac{3}{2}}(1 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(7)

Έτσι επανερχόμαστε στην εξίσωση (4) και αντικαθιστούμε την σχέση (7) και (5) και έχουμε:

$$\frac{2y\ddot{y} - \dot{y}(1 + \dot{y}^2)\dot{y}'}{2\dot{y}^{\frac{3}{2}}(1 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(1 + \dot{y}^2)^2}{2\dot{y}^{\frac{3}{2}}(1 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

(8)

Αρα παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 2y\ddot{y} - \dot{y}^2(1 + \dot{y}^2) + (1 + \dot{y}^2)^2 &= 0 \\ 2y\ddot{y} + \dot{y}^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

(9)

Η (9) είναι δεύτερου βαθμού, μη γραμμική ομογενής διαφορική. Παρατηρούμε ότι:

$$(\dot{y}^2 + 1)' = \ddot{y}(2\dot{y}) = 2\dot{y}\ddot{y}$$

Το οποίο μοιάζει με τον πρώτο όρο αν πολλαπλασιαστεί με y και φύγει το $\dot{y}$. Για να «κολλήσει» ένα y στον όρο έχουμε 2 επιλογές. Είτε να πολλαπλασιάσουμε με y την παραπάνω παράγωγο του $(1 + \dot{y}^2)$ είτε να παραγωγίσουμε την σχέση $y(1 + \dot{y}^2)$. Από την πρώτη δεν συμπεραίνουμε κάτι αλλά φαίνεται ότι αν παραγωγίσουμε την δεύτερη προκύπτει:

$$(y(1 + \dot{y}^2))' = \dot{y}(1 + \dot{y}^2) + 2y\ddot{y}\dot{y} = \dot{y}(2y\ddot{y} + \dot{y}^2 + 1)$$

(10)

Αρα αν πολλαπλασιάσουμε την (9) με y προκύπτει:

$$\frac{d}{dx} (y(1 + \dot{y}^2)) = 0$$

(11)

Ολοκληρώνουμε:

$$y(1 + \dot{y}^2) = c$$

(12)

Η σταθερά c όμως καθορίζεται από τις οριακές συνθήκες, οι οποίες για να καθοριστούν πρέπει να γνωρίζουμε την μορφή της y . Αλλά παραμένει μια σταθερά. Ολοκληρώνουμε και έχουμε:

$$1 + y'^2 = \frac{c}{y} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{c}{y} - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{c}{y} - 1} \Rightarrow dx = \pm \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{c-y}} dy$$

(13)

$$x = \int_0^y \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{c-y}} dy$$

(14)

Θέτουμε $y = c\alpha$ και παίρνουμε:

$$x = c \int_0^{\frac{y}{c}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1-a}} da$$

(15)

Θέλουμε να κάνουμε έναν μετασχηματισμό τέτοιον ώστε η υπόριζη ποσότητα $1-a$ να μπορεί να γραφτεί τετραγωνισμένη ώστε να φύγει η ρίζα. Αν υποθέσουμε έναν τριγωνομετρικό μετασχηματισμό ($a = \sin^2 \theta$) έχουμε:

$$x = 2c \int_0^{\theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \sin \theta \cos \theta d\theta = 2c \int_0^{\theta} \sin^2 \theta d\theta = c \int_0^{\theta} (1 - \cos^2 \theta) d\theta$$

$$x = c\theta - c \int_0^{\theta} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \frac{c}{2}(2\theta) - \frac{c}{2} \sin(2\theta) = \frac{c}{2}[2\theta - \sin(2\theta)]$$

(16)

Όπου $\pm \sqrt{a} = \sin \theta \Rightarrow \theta = \pm \arcsin(\sqrt{a}) = \pm \arcsin\left(\frac{y}{c}\right)$. Τώρα το πρόσημο $\pm$ δεν πρέπει να μας απασχολεί γιατί θα εμπεριέχεται στην σταθερά A που θα επιλέξουμε ως παραμετρική σταθερά. Αν θέσουμε 2θ ίσο με φ και $c=2A$ έχουμε ότι:

$$x = A(\varphi - \sin \varphi)$$

(17)

Αλλά τότε είναι:

$$y = c\alpha = 2A \sin^2 \theta = 2A(1 - \cos^2 \theta) = A - A \cos(2\theta) = A(1 - \cos \varphi)$$

(18)

Οπότε έχουμε τις παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς (καμπύλης):

$$x = A(\varphi - \sin \varphi)$$

$$y = A(1 - \cos \varphi)$$

(19)

Η σχέση (19) εκφράζει μια κυκλοειδή καμπύλη και η τροχιά του σωματιδίου έχει εκφραστεί παραμετρικά με την βοήθεια της μεταβλητής φ . Αν θέλουμε να εκφράσουμε το x ως συνάρτηση του y τότε έχουμε:

$$x = A \cos^{-1} \left(1 - \frac{y}{A} \right) - \sqrt{y(2A - y)}$$

(20)

Όταν $x=0$ είναι και $y=0$ άρα πρέπει:

$$0 = A \cos^{-1}(1) - 0 = 0 - 0 = 0$$

(21)

Άρα πράγματι «επιβεβαιώνεται» η τελική εξίσωση (20). Η σταθερά A καθορίζεται από την τελική οριακή συνθήκη. Δηλαδή αν η τροχιά τελειώνει στο σημείο (X, Y) τότε θα πρέπει η A να είναι τέτοια ώστε να ικανοποιεί την σχέση:

$$X = A \cos^{-1} \left(1 - \frac{Y}{A} \right) - \sqrt{Y(2A - Y)}$$

(22)

Από την σχέση (22) βρίσκεται η σταθερά A και κατά συνέπεια η εξίσωση της καμπύλης. Αν θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε τον χρόνο, απλά βρίσκουμε το ολοκλήρωμα στην σχέση (3) με ότι προσέγγιση θέλουμε.

ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΔΥΝΑΜΗ

Γνωρίζοντας τώρα την τροχιά μπορούμε να υπολογίσουμε και την κεντρομόλο δύναμη που δέχεται το σωματίδιο σε κάθε θέση. Θα μας βολέψει να εκφραστούμε πάλι παραμετρικά και να έχουμε:

$$x = A(\theta - \sin\theta)$$

$$y = A(1 - \cos\theta)$$

Η καμπυλότητα K της καμπύλης είναι:

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(23)

Είναι:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\theta - \sin\theta)}{d(1 - \cos\theta)} = \frac{d(\theta - \sin\theta)}{d\theta} \frac{1}{\frac{d(1 - \cos\theta)}{d\theta}} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \right) \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{1}{1 - \cos\theta} \frac{1}{A(1 - \cos\theta)}$$

$$= -\frac{1}{A} \frac{1}{(1 - \cos\theta)^2}$$

(24)

Αντικαθιστώντας τις (24) στην καμπυλότητα (23) παίρνουμε το K , και άρα και την κεντρομόλο δύναμη, η οποία θα δίνεται από την γνωστή σχέση, με R την ακτίνα καμπυλότητας:

$$F_k = \frac{mv^2}{R} = mv^2 K$$

(25)

Όπου m η μάζα και v η ταχύτητα του σωματιδίου.

ΚΛΕΙΣΤΗ ΚΥΚΛΟΕΙΔΗΣ ΤΡΟΧΙΑ

Έστω ότι θέλουμε το αρχικό σωματίδιο να ακολουθήσει μια τροχιά, να επανέλθει στο $X, Y=0$ και αυτό στον ελάχιστο χρόνο. Όπως βρήκαμε η τροχιά του πρέπει να είναι κυκλοειδής και για τις τελικές οριακές συνθήκες έχουμε:

$$Y = A(1 - \cos\theta) = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 2\pi$$

Τότε:

$$X = A(\theta - \sin\theta) = 2\pi A \Rightarrow A = \frac{X}{2\pi}$$

(26)

Η παράμετρος θ πρέπει να είναι 2π γιατί αν ήταν $\theta=0$ τότε θα είχαμε $X=0$ το οποίο είναι άτοπο. Οπότε αν αναζητούμε την κεντρομόλο δύναμη στο κατώτατο σημείο ($\theta=\pi$) έχουμε από (24):

$$y'(\pi) = 0$$

$$y''(\pi) = -\frac{1}{4A}$$

(27)

Άρα η καμπυλότητα K είναι $K = -\frac{1}{4A}$ οπότε έχουμε για την κεντρομόλο:

$$F_k = mv^2 K = -\frac{mv^2}{4A}$$

(28)

Το αρνητικό πρόσημο εκφράζει το γεγονός ότι η δύναμη είναι προς τα πάνω. Εφόσον όμως η κεντρομόλος είναι $F_k = mg - N$ είναι:

$$N = mg + \frac{mv^2}{4A}$$

(29)

Από διατήρηση ενέργειας:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(2A) \Rightarrow v^2 = 4gA$$

(30)

Οπότε τελικά έχουμε:

$$N = mg + mg = 2mg$$