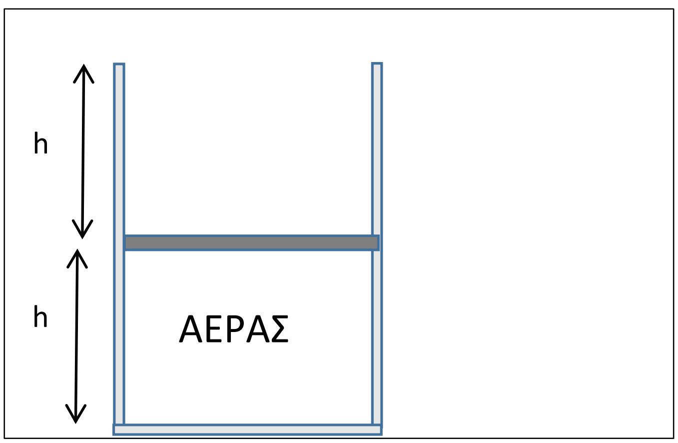
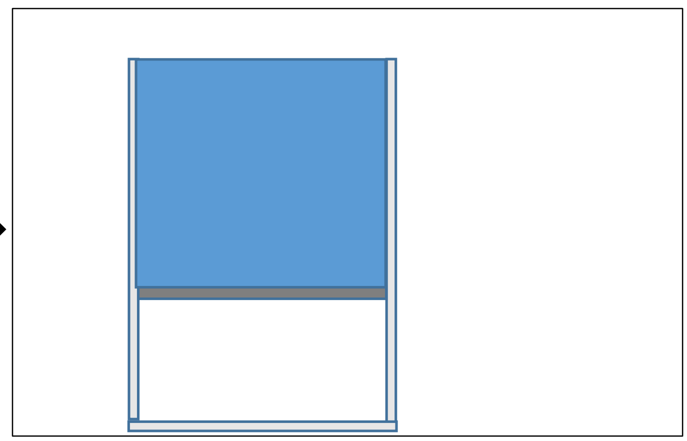
ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΠΙΕΣΗ – ΙΣΟΘΕΡΜΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΑΕΡΙΟΥ – ΜΕΓΙΣΤΗ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΠΟΣΤΑΣΗ

Στο κυλινδρικό δοχείο που βρίσκεται σε θάλαμο χωρίς αέρα, ισορροπεί έμβολο σε ύψος $h=0{,}2m$ από τη βάση του. Στο δοχείο κάτω από το έμβολο υπάρχει αέρας (Σχήμα 1). Το ύψος του δοχείου είναι $H=2h$ και το εμβαδόν της βάσης του είναι $A=100\ cm^2$. Στις επαφές του εμβόλου με το δοχείο δεν υπάρχουν τριβές και δεν διαφεύγει αέρας. Ρίχνουμε αργά νερό στο δοχείο μέχρι να γεμίσει (Σχήμα 2). Δίνονται : μάζα εμβόλου $m=3Kg$, $\rho_v = 10^3\ Kg/m^3$, $g=10\ m/s^2$. Η μεταβολή του αέρα να θεωρηθεί ισόθερμη.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Να βρείτε:

α) Το ύψος από τη βάση του δοχείου στο οποίο θα ισορροπήσει το έμβολο.

β) Σε ποιο ύψος από τη βάση του δοχείου , πάνω από το έμβολο, πρέπει να ανοίξουμε μια μικρή τρύπα, για να είναι μέγιστη η αρχική οριζόντια απόσταση της φλέβας νερού από το δοχείο , στο επίπεδο που διέρχεται από τον πυθμένα του δοχείου;

Σφραγίζουμε το δοχείο στο Σχήμα 2 από πάνω, το αναποδογυρίζουμε , του ανοίγουμε μια μικρή τρύπα σε ύψος $h_3= 0{,}2m$ από τη νέα του βάση και ταυτόχρονα διοχετεύουμε με αντλία στο θάλαμο, ελεγχόμενη ποσότητα αέρα.

γ) Όταν η απόσταση της φλέβας νερού από το δοχείο , στην οριζόντια επιφάνεια που διέρχεται από το νέο πυθμένα, είναι β=0,4 m , να βρείτε την πίεση του αέρα στο θάλαμο. Η ταχύτητα του εμβόλου να θεωρηθεί ίση με μηδέν. (Ιδέα κουμπάρου)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Η πίεση του αέρα στο δοχείο, πριν ρίξουμε νερό, είναι $P_1 = \frac{W}{A} = \frac{30}{0,01} = 3 \cdot 10^3$ N/m^3 (1)

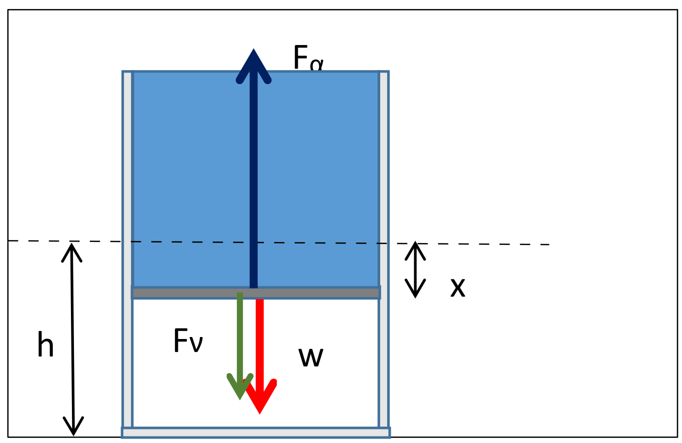
Στο έμβολο ασκούνται οι δυνάμεις - βάρος εμβόλου W , δύναμη λόγω της πίεσης του νερού στο έμβολο F_v και δύναμη λόγω της πίεσης του αέρα στο έμβολο F_α .

Από την ισορροπία του εμβόλου έχουμε:

$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_v + W = F_\alpha$ και

διαιρώντας με το εμβαδόν του εμβόλου A

γίνεται : $\frac{F\nu}{A} + \frac{W}{A} = \frac{F\alpha}{A}$ (2)



Το πηλίκο $\frac{F\nu}{A}$ είναι η υδροστατική πίεση στο έμβολο $P_\upsilon = \rho g(h+x) = 10^4 (h+x)$, το πηλίκο $\frac{W}{A} = \frac{30}{0,01} = 3 \cdot 10^3$ Pa και το πηλίκο $\frac{F\alpha}{A}$ είναι η πίεση του αέρα P_2 . Από την εξίσωση της ισόθερμης $P_1 V_1 = P_2 V_2$ και τη σχέση (1) προκύπτει $P_2 = P_1 V_1 / V_2 = 3 \cdot 10^3 \frac{h}{h-x}$.

Άρα (2) $\Rightarrow 10^4 (h+x) + 3 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^3 \frac{h}{h-x} \Rightarrow 10 (h+x) + 3 = 3 \cdot \frac{h}{h-x} \Rightarrow$

$10 (h+x) (h-x) + 3(h-x) =3h \Rightarrow 10 (h^2-x^2) + 3h - 3x = 3h \Rightarrow 10 x^2 + 3x -10h^2 = 0$

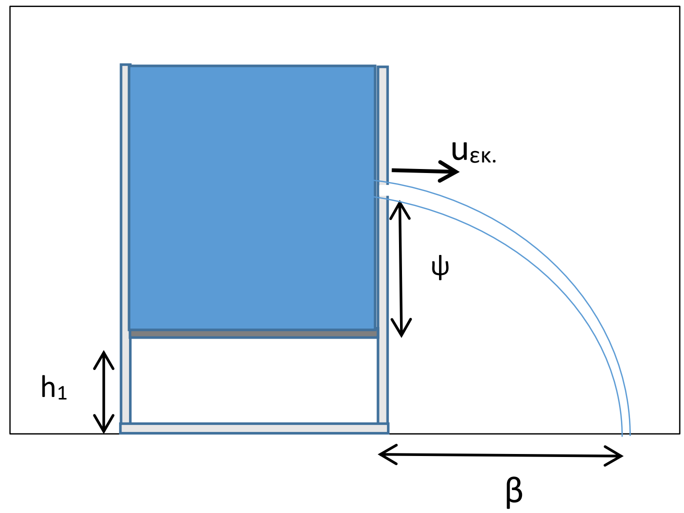
.

και με αντικατάσταση h= 0,2m καταλήγουμε στη δευτεροβάθμια εξίσωση : $10 x^2 + 3x - 0,4= 0$

$\Delta = 9 + 4 \cdot 10 \cdot 0,4 = 25$ και $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{20}$ Άρα $x_1 = 0,1m$ και $x_1 = -0,4m$ ΔΕΚΤΗ η $x_1 = 0,1m$

Επομένως $h_1 = h - x_1$ => $\boxed{h_1 = 0,1m}$

β) Το έμβολο ισορροπεί σε ύψος $h_1 = 0,1m$ από τον πυθμένα του δοχείου. Έστω ψ το ύψος της μικρής τρύπας από το έμβολο. Η αρχική ταχύτητα εκροής από την τρύπα βρίσκεται από το νόμο του Bernoulli:



$$\rho g\,(0,3 - \psi) = \frac{1}{2}\rho\, u_{εκ.}^2 \quad =>$$

$$u_{εκ.}^2 = 2g\,(0,3 - \psi) = 6 - 20\psi \quad (1)$$

Ο χρόνος για να μετατοπιστεί κατακόρυφα η αρχική στοιχειώδης (πολύ μικρή) μάζα νερού από την τρύπα μέχρι την οριζόντια επιφάνεια που διέρχεται από τον πυθμένα του δοχείου, βρίσκεται από την εξίσωση της οριζόντιας βολής:

$$\psi + 0,1 = \frac{1}{2} g t^2 \quad => \quad t^2 = (2\psi + 0,2)0,1 \qquad (2)$$

Η οριζόντια μετατόπιση β της αρχικής στοιχειώδους μάζας, στο επίπεδο που διέρχεται από τον πυθμένα του δοχείου , δίνεται από την εξίσωση της οριζόντιας βολής:

$\beta = u_{εκ.}t$ => $\beta^2 = u_{εκ}^2.t^2$ και από τις σχέσεις (1) , (2) προκύπτει:

$\beta^2 = (6-20\psi)(2\psi + 0,2)\,0,1$ => $4\psi^2 - 0,8\psi + \beta^2 - 0,12 = 0$

Για να έχει λύση η εξίσωση θα πρέπει: $\Delta \geq 0$ => $0,8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (\beta^2 - 0,12) \geq 0$ =>

$4 \cdot 4 \cdot (\beta^2 - 0,12) \leq 0,8^2$ => $\beta^2 - 0,12 \leq 0,04$ => $\beta^2 \leq 0,16$ => $\beta \leq 0,4$

Άρα η μέγιστη οριζόντια απόσταση είναι: $\beta_{max} = 0,4m$ και η λύση της εξίσωσης είναι :

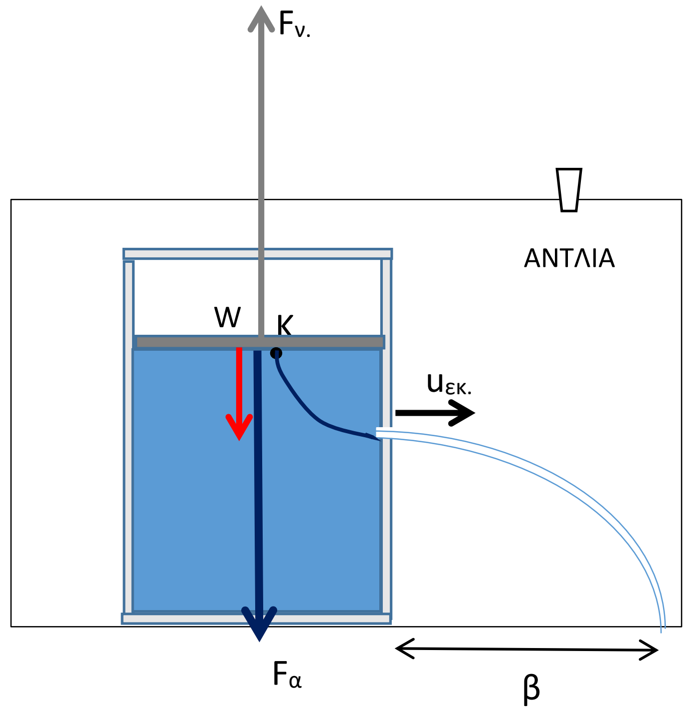
$\psi = \frac{0,8 \pm 0}{8}$ => $\psi = 0,1$ m Άρα το ύψος είναι $h_2 = h_1 + \psi$ => $\boxed{h_2 = 0,2\ m}$

γ) Ο χρόνος της κατακόρυφης μετατόπισης μιας στοιχειώδους μάζας νερού, από την τρύπα μέχρι την οριζόντια επιφάνεια που διέρχεται από τον νέο πυθμένα, βρίσκεται από την εξίσωση της οριζόντιας βολής:

$\psi = h_3 = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad 0{,}2 = \frac{1}{2} 10 t^2 \quad \Rightarrow$

$t = 0{,}2s$ (3)

Από την εξίσωση της οριζόντιας μετατόπισης της στοιχειώδους μάζας στο οριζόντιο επίπεδο, $\beta = u_{εκ.} t$, με αντικατάσταση της (3) και της τιμής β= 0,4 m υπολογίζουμε την ταχύτητα εκροής από την τρύπα.



$0{,}4 = u_{εκ.} 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad u_{εκ.} = 2 m/s$ (4)

Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli για μια ρευματική γραμμή ,από ένα σημείο Κ του νερού σε επαφή με το έμβολο μέχρι την τρύπα. Θεωρούμε την ταχύτητα του εμβόλου $u_{εμ.} = 0$.

$P_K + \rho g(h - h_1) = P_\Theta + \frac{1}{2} \rho u_{εκ.}^2$ με P_Θ την πίεση του αέρα στο θάλαμο. (5)

Η πίεση $P_K = \frac{F'\nu}{A}$ όπου F'_ν η αντίδραση της F_ν, δηλαδή $P_K = \frac{F\nu}{A}$ (6)

Από την ισορροπία του εμβόλου : $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_\nu = W + F_\alpha \Rightarrow \frac{F\nu}{A} = \frac{W}{A} + \frac{F\alpha}{A}$ και

λόγω της (6) $\Rightarrow P_K = \frac{W}{A} + \frac{F\alpha}{A} \Rightarrow P_K = 3 \cdot 10^3 + P_2$ όμως

$P_2 = P_1 V_1 / V_2 = 3 \cdot 1O^3 \frac{h}{h-x} = 6 \cdot 1O^3$ Pa Άρα $P_K = 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3 \Rightarrow$

$P_K = 9 \cdot 10^3$ Pa (7)

Με αντικατάσταση στην (5) των τιμών από τις σχέσεις (4) , (7) :

$9 \cdot 10^3 + 10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = P_\Theta + \frac{1}{2} 10^3 \cdot 2^2 \Rightarrow$ $\boxed{P_\Theta = 8 \cdot 10^3 \text{ Pa}}$

pananasgiannis@yahoo.gr