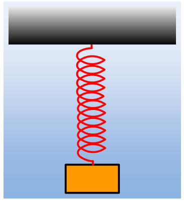
Μερικά ερωτήματα σε μια φθίνουσα ταλάντωση.



Ένα σώμα μάζας 0,1kg ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k=10N/m. Εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 20cm και σε μια στιγμή t=0, το αφήνουμε να ταλαντωθεί. Παρατηρούμε ότι τη στιγμή t_1=0,63s το σώμα σταματά την προς τα κάτω κίνησή του, για πρώτη φορά, αλλά τη στιγμή αυτή απέχει κατά 10,1cm από την αρχική θέση ισορροπίας του. Με δεδομένο ότι το σώμα δέχεται δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{απ}$=-bυ, ενώ η προς τα κάτω κατεύθυνση θεωρείται θετική:

i) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του σώματος τη στιγμή t_2=1,26s.

ii) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης απόσβεσης από t=0, μέχρι την στιγμή t_2.

iii) Σε μια στιγμή t_3 το σώμα έχει απομάκρυνση 4cm και ταχύτητα -0,3m/s.

α) Να υπολογιστεί η απώλεια της ενέργειας ταλάντωσης από τη στιγμή t=0, έως τη στιγμή t_3.

β) Για τη χρονική στιγμή t_3 ισχύει:

a) $t_3 < t_1$, b) $t_1 < t_3 < t_2$, c) $t_3 > t_2$.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

iv) Αν η σχέση μεταξύ των σταθερών Λ και b είναι Λ=b/2m:

α) Να υπολογιστούν οι τιμές των δύο σταθερών.

β) Ποια η επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή t_3;

γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μείωσης της ενέργειας ταλάντωσης τη στιγμή t_3.

Δίνεται ℓn0,5=-0,69.

Απάντηση:

i) Τη στιγμή t=0, που αφήνεται το σώμα να κινηθεί βρίσκεται σε ακραία θετική απομάκρυνση, συνεπώς A_0=20cm, ενώ τη στιγμή t_1 όπου η ταχύτητά του ξανά μηδενίζεται, ενώ εκινείτο προς τα κάτω (θετική κατεύθυνση), ξαναβρίσκεται σε ακραία θετική απομάκρυνση (θέση πλάτους), οπότε A_1=10,1cm, ενώ η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης θα είναι $T=t_1$=0,63s. Αλλά η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης παραμένει σταθερή, συνεπώς τη στιγμή $t_2=2t_1$=2T, θα βρίσκεται ξανά σε θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης, με μηδενική ταχύτητα, θέση πλάτους A_2, όπου:

$$\frac{A_0}{A_1}=\frac{A_1}{A_2}\rightarrow$$

$$A_2=\frac{A_1^2}{A_0}=\frac{10{,}1^2}{20}cm=5{,}1cm$$

ii) Η δύναμη απόσβεσης είναι υπεύθυνη για τη μείωση της ενέργειας ταλάντωσης. Συνεπώς το έργο της εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρεται από το σώμα στο περιβάλλον και:

$$W_{F_{απ}}=\Delta E=E_2-E_0=\frac{1}{2}DA_2^2-\frac{1}{2}DA_0^2$$

Όπου D=k, ενώ αξίζει να επισημανθεί ότι στις δύο αυτές θέσεις, η ενέργεια είναι μόνο δυναμική, οφειλόμενη στη δύναμη επαναφοράς F=-Dx. Με αντικατάσταση:

$$W_{F_{απ}} = \frac{1}{2}10 \cdot 0{,}051^2\,J - \frac{1}{2}10 \cdot 0{,}2^2\,J \approx -0{,}18\,J$$

iii) Τη στιγμή t_3 η ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση:

$$E_3 = U + K = \frac{1}{2}Dx_3^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 \rightarrow$$

$$E_3 = \frac{1}{2}10 \cdot 0{,}04^2\,J + \frac{1}{2}0{,}1 \cdot 0{,}3^2\,J \approx 0{,}01J$$

α) Αλλά τότε από τη στιγμή t=0, μέχρι τη στιγμή t_3 έχουμε απώλεια ενέργειας:

$$\Delta E = E_0 - E_3 = \frac{1}{2}DA_0^2 - E_3 = \frac{1}{2}10 \cdot 0{,}2^2\,J - 0{,}01J = 0{,}19J$$

β) Μέχρι τη στιγμή t_2 είχαμε απώλεια ενέργειας $\Delta E_{0\to t2}$=0,18J, ενώ μέχρι τη στιγμή t_3 $\Delta E_{0\to t3}$=0,19J. Για να συμβαίνει αυτό προφανώς το σώμα ταλαντώθηκε για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα και $t_3>t_2$.

iv) α) Τα διαδοχικά πλάτη της φθίνουσας ταλάντωσης (οι διαδοχικές μέγιστες θετικές απομακρύνσεις), συνδέονται με τη σχέση:

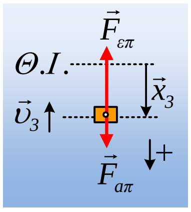
$$A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}\text{, όπου } t = nT \rightarrow$$

$$A_1 = A_0 \cdot e^{-\Lambda T} \rightarrow \frac{A_1}{A_0} = e^{-\Lambda T} \rightarrow \ell n\left(\frac{A_1}{A_0}\right) = \ell n\left(e^{-\Lambda T}\right) \rightarrow \Lambda = -\frac{1}{T}\ell n\left(\frac{A_1}{A_0}\right) \rightarrow$$

$$\Lambda = -\frac{1}{0{,}63}\ell n\left(\frac{10{,}1}{20}\right) \approx -\frac{1}{0{,}63}\ell n0{,}5 \approx 1{,}1s^{-1}$$

Αλλά $\Lambda = \frac{b}{2m} \rightarrow b = 2\Lambda m = 2 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}1kg/s = 0{,}22kg/s$

β) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα τη στιγμή t_3. Οπότε από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:



$$\Sigma F = m\alpha \rightarrow F_{επ} + F_{απ} = m \cdot \alpha \rightarrow$$

$$\alpha = \frac{-Dx_3 - b\upsilon_3}{m} = \frac{-10 \cdot (0{,}04) - 0{,}22 \cdot (-0{,}3)}{0{,}1}m/s^2 = -3{,}34m/s^2.$$

Το (-) σημαίνει ότι το σώμα επιταχύνεται προς τα πάνω.

γ) Η ενέργεια ταλάντωσης μειώνεται εξαιτίας της δύναμης απόσβεσης, η ισχύς της οποίας είναι:

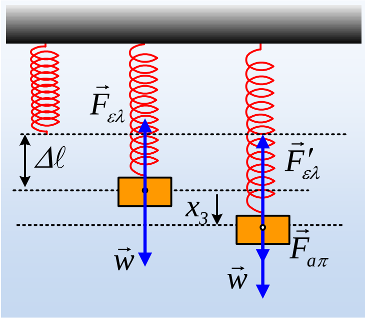
$$P_{F_{απ}} = |F_{απ}| \cdot |\upsilon_3| \cdot συνα = -b\upsilon_3^2 = -0{,}22 \cdot 0{,}3^2 W = -0{,}0198W$$

Αλλά τότε η ενέργεια ταλάντωσης μειώνεται με ρυθμό 0,0198J/s.

Σχόλια.

1) Αρχικά το σώμα ισορροπεί και το ελατήριο έχει επιμηκύνει το ελατήριο κατά Δℓ, όπου ΣF=0 → mg=kΔℓ → $\Delta\ell = \frac{mg}{k} = 0{,}1m$. Κατά συνέπεια τη στιγμή t_3, το σώμα βρίσκεται στη θέση του σχήματος, έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά $\Delta\ell' = 0{,}1m + 0{,}04m = 0{,}14m$ και δέχεται τις δυνάμεις, όπως στο

σχήμα.



Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα μέτρα των δυνάμεων παίρνουμε:

$$\Sigma F=m\alpha \rightarrow mg-k(\Delta\ell+x_3)-b\upsilon=m\alpha\rightarrow$$

$$a=\frac{mg-k(\Delta\ell+x_3)-b\upsilon}{m}=\frac{0{,}1\cdot 10-10(0{,}1+0{,}04)-0{,}22\cdot(-0{,}3)}{0{,}1}m/s^2=-3{,}34m/s^2$$

Προτιμήθηκε παραπάνω να δοθεί μια περισσότερο γενική λύση…

2) Θα μπορούσε κάποιος, για να απαντήσει στο iv.γ) ερώτημα, να υπολογίσει την ενέργεια τη στιγμή t_3 E=0,01J, και, θεωρώντας ότι ισχύει η εξίσωση $E=E_0\cdot e^{-2\Lambda t}$, να δουλέψει ως εξής:

$$\frac{dE}{dt}=E_0(-2\Lambda)e^{-2\Lambda t}=-2\Lambda\cdot E=-2\cdot 1{,}1\cdot 0{,}01J/s=-0{,}022J/s$$

Προφανώς το αποτέλεσμα είναι διαφορετικό και λανθασμένο, αφού η εξίσωση $E=E_0\cdot e^{-2\Lambda t}$ μας δίνει την **τιμή** της ενέργειας μόνο τις χρονικές στιγμές, που το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση. Αλλά και πάλι μας δίνει την τιμή (έναν αριθμό), δεν είναι συνάρτηση και δεν παραγωγίζεται, αφού στις θέσεις αυτές ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας είναι μηδενικός (ακραίες θέσεις με μηδενική ταχύτητα) και όχι ίσος με

$$\frac{dE}{dt}=-2\Lambda\cdot E$$

dmargaris@gmail.com