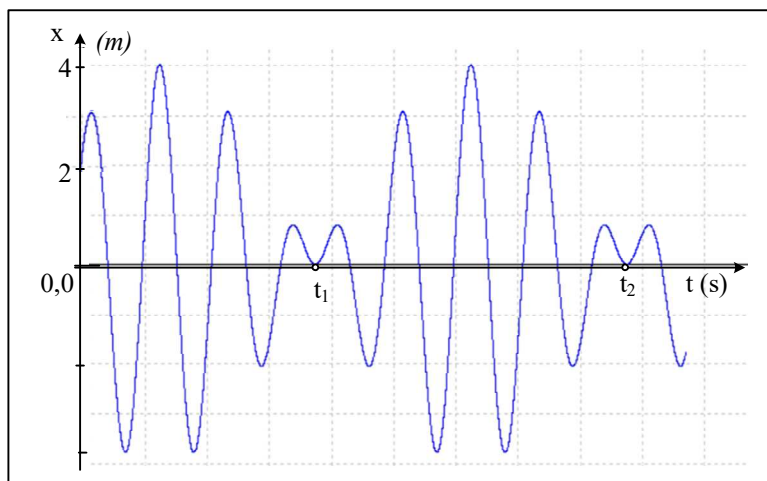


Μελέτη μιας σύνθεσης από ένα διάγραμμα



Ένα σώμα μάζας $m=0,2\text{kg}$ κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος ενός προσανατολισμένου άξονα, εκτελώντας μια παλινδρομική κίνηση γύρω από την θέση $x=0$ και στο διάγραμμα δίνεται η θέση του σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου οι χρονικές στιγμές που έχουν σημειωθεί στο σχήμα είναι $t_1=3,74\text{s}$ και $t_2=8,74\text{s}$.

Η παραπάνω κίνηση μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία δύο αρμονικών ταλαντώσεων με εξισώσεις:

$$x_1=2\cdot\eta\mu(2\pi t) \text{ και } x_2=A_2\cdot\eta\mu(\omega_2 t+\pi/2) \quad (\text{μονάδες στο S.I.})$$

- Να υπολογιστεί το πλάτος A_2 .
- Να βρεθεί η εξίσωση $x=x(t)$ για την απομάκρυνση του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογιστεί η περίοδος του διακροτήματος καθώς και η γωνιακή συχνότητα ω_2 .
- Για τη χρονική στιγμή $t_3=5\text{s}$ να υπολογισθούν:
 - Η ταχύτητα του σώματος.
 - Η (συνισταμένη) δύναμη που επιταχύνει το σώμα, καθώς και η ισχύς της.

Απάντηση:

- Θεωρώντας την κίνηση ως σύνθετη, αποτελούμενη από τις δύο παραπάνω αρμονικές ταλαντώσεις, οι οποίες έχουν την ίδια διεύθυνση και πραγματοποιούνται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, παίρνουμε με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας, για την απομάκρυνση του σώματος:

$$x=x_1+x_2=2\cdot\eta\mu(2\pi t)+A_2\cdot\eta\mu(\omega_2 t+\pi/2) \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

Αλλά τότε τη στιγμή $t=0$, $x=2\text{m}$ και με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$2=2\cdot\eta\mu 0^\circ+A_2\cdot(0+\pi/2) \rightarrow A_2=2\text{m}$$

- Με εφαρμογή της «γνωστής» τριγωνομετρικής ταυτότητας παίρνουμε:

$$x=x_1+x_2=2(\eta\mu 2\pi t+\eta\mu(\omega_2 t+\pi/2)) \rightarrow$$

$$x = 2 \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi t - \omega_2 t - \pi/2}{2}\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi t + \omega_2 t + \pi/2}{2}\right) \rightarrow$$

$$x = 4 \cdot \sin\left(\pi t - \frac{\omega_2 t}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \eta\mu\left(\pi t + \frac{\omega_2 t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2)$$

Η παραπάνω εξίσωση (2) είναι, (έστω και λίγο διαφορετικής μορφής), η εξίσωση της «ιδιόμορφης» ταλάντωσης που εμφανίζει διακροτήματα και όπου το «πλάτος» του διακροτήματος δίνεται από την σχέση:

$$A = 4 \cdot \sin\left(\pi t - \frac{\omega_2 t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Το «πλάτος» μηδενίζεται για πρώτη φορά τη στιγμή t_1 και για δεύτερη φορά τη στιγμή t_2 , οπότε το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1 = 5s$, δεν είναι τίποτα άλλο, παρά η περίοδος του διακροτήματος:

$$T_\delta = 5s$$

Αλλά για την περίοδο αυτή έχουμε:

$$T_\delta = 5s \rightarrow \frac{1}{|f_1 - f_2|} = 5s \rightarrow |f_1 - f_2| = 0,2Hz \rightarrow f_1 - f_2 = \pm 0,2Hz$$

Όμως $f_1 = \omega_1 / 2\pi = 1Hz$, οπότε:

$$f_2 = 1,2 Hz \quad \eta \quad f_2 = 0,8 Hz$$

Μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1 και t_2 μπορούμε να μετρήσουμε στο διάγραμμα 4,5 ταλαντώσεις, πράγμα που σημαίνει ότι η συχνότητα της κίνησης, είναι ίση:

$$f_k = \frac{N}{\Delta t} = \frac{4,5}{5} Hz = 0,9Hz = \frac{f_1 + f_2}{2} \rightarrow$$

$$f_1 + f_2 = 2f_k \rightarrow f_2 = 2 \cdot 0,9 Hz - 1Hz = 0,8Hz.$$

Συνεπώς $\omega_2 = 2\pi f_2 = 1,6\pi$ (rad/s).

Οπότε επιστρέφοντας στην (2) παίρνουμε:

$$x = 4 \cdot \sin\left(0,2\pi t - \frac{\pi}{4}\right) \eta\mu\left(1,8\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

iii) Από την αρχή της επαλληλίας, για την κίνηση του σώματος την οποία αναλύσαμε σε δύο αρμονικές ταλαντώσεις, πέρα από την εξίσωση $x = x_1 + x_2$, ισχύουν και οι αντίστοιχες εξισώσεις για ταχύτητες και επιταχύνσεις:

$$v = v_1 + v_2 \quad \text{και} \quad a = a_1 + a_2$$

α) Έτσι τη χρονική στιγμή $t_3 = 5s$, έχουμε για την ταχύτητα:

$$v = v_1 + v_2 = A\omega_1 \cdot \sin(2\pi t) + A\omega_2 \cdot \sin(2\pi t + \pi/2) \rightarrow$$

$$v = 4\pi \cdot \sin(2\pi \cdot 5) + 3,2\pi \cdot \sin(1,6\pi \cdot 5 + \pi/2) \rightarrow$$

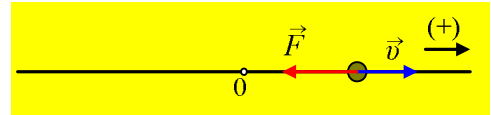
$$v = 4\pi + 0 = 4\pi \text{ m/s}$$

β) Με την ίδια λογική για την επιτάχυνση του σώματος θα έχουμε:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = -\omega_1^2 \cdot A \cdot \eta\mu(2\pi t) - \omega_2^2 \cdot A \cdot \eta\mu(1,6\pi t + \pi/2) \rightarrow$$

$$\alpha = -4\pi^2 \cdot 2 \cdot \eta\mu(2\pi \cdot 5) - 1,6^2 \pi^2 \cdot 2 \cdot \eta\mu(1,6\pi \cdot 5 + \pi/2) \rightarrow$$

$$\alpha \approx 0 - 50,5 \cdot \eta\mu(8\pi + \pi/2) = -50,5 \text{ m/s}^2.$$



Αλλά τότε, τη στιγμή αυτή δέχεται από το περιβάλλον του (συνισταμένη) δύναμη, με τιμή:

$$F = m \cdot \alpha = 0,2 \cdot (-50,5) \text{ N} = -10,1 \text{ N}$$

Ενώ για την ισχύ της δύναμης αυτής, θα έχουμε (δουλεύουμε με αλγεβρικές τιμές):

$$P = F \cdot v = (-10,1) \cdot 4\pi \text{ W} = -40,4 \cdot \pi \text{ W} = -127 \text{ W}$$

dmargaris@gmail.com