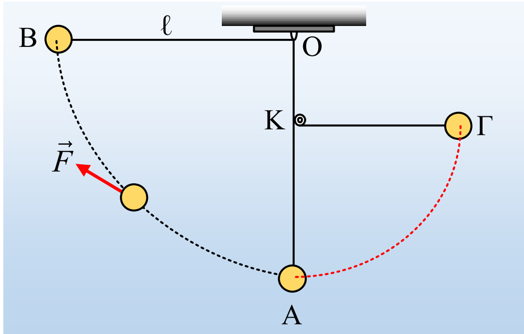
Όταν ένα καρφάκι αλλάζει την κυκλική τροχιά



Ένα σώμα μάζας m ισορροπεί στη θέση Α, στο άκρο κατακόρυφου νήματος μήκους ℓ, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο Ο. Ασκώντας πάνω του μια μεταβλητή δύναμη F, φέρνουμε το σώμα στη θέση Β. Αν g η επιτάχυνση της βαρύτητας:

i) Το έργο της δύναμης F από το Α στο Β είναι:

α) $W < mg\ell$, β) $W = mg\ell$, γ) $W > mg\ell$.

ii) Αφήνουμε το σώμα να κινηθεί από την θέση Β, οπότε φτάνει με κινητική ενέργεια K_1 στην αρχική του θέση Α. Για την κινητική αυτή ενέργεια ισχύει:

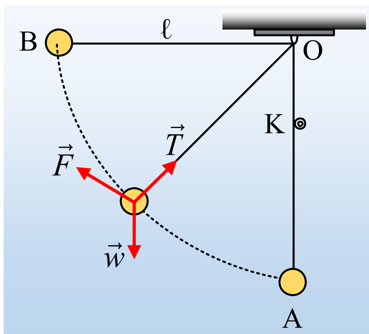
α) $K_1 < mg\ell$, β) $K_1 = mg\ell$, γ) $K_1 > mg\ell$.

iii) Τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο (με το σώμα στη θέση Α), έρχεται σε επαφή με ένα καρφί Κ, πάνω στο οποίο εκτρέπεται, με αποτέλεσμα το σώμα να διαγράφει μια νέα κυκλική τροχιά φτάνοντας στη θέση Γ, με το νήμα ΚΓ οριζόντιο. Η κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση Γ είναι ίση με $K_2 = 0{,}4mg\ell$.

α) Να υπολογιστεί η τάση του νήματος στη θέση Γ.

β) Να βρεθεί επίσης η τάση του νήματος στη θέση Α, ελάχιστα πριν το νήμα έρθει σε επαφή με το καρφί και αμέσως οπότε ξεκινά την νέα κυκλική τροχιά του.

Απάντηση:



i) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ) για την μετακίνησή του από τη θέση Α στη θέση Β.

$$K_B - K_A = W_w + W_T + W_F \rightarrow$$
$$0 - 0 = -mg\ell + 0 + W_F$$
$$W_F = mg\ell$$

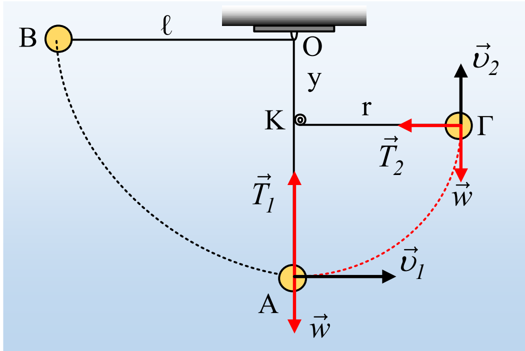
Σωστό το β).

ii) Μόλις αφήσουμε ελεύθερο το σώμα στη θέση Β, αυτό θα κινηθεί προς τη θέση Α. Θεωρώντας μηδενική τη δυναμική του ενέργεια στη θέση Α, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (ΑΔΜΕ) μεταξύ των θέσεων Β και Α:

$$K_B + U_B = K_A + U_A \rightarrow$$
$$0 + mg\ell = K_1 + 0 \rightarrow$$
$$K_1 = mg\ell$$

Σωστό το β).

iii) Μόλις το νήμα αγγίξει το καρφί Κ, εκτρέπεται πάνω του με αποτέλεσμα το σώμα να κινείται σε μια νέα κυκλική τροχιά, ακτίνας r=ℓ-y, όπου y η κατακόρυφη απόσταση (OK).



Θεωρώντας τώρα $U_\Gamma=0$, εφαρμόζουμε ξανά την ΑΔΜΕ μεταξύ των θέσεων Β και Γ:

$$K_B + U_B = K_\Gamma + U_\Gamma \rightarrow$$
$$0 + mgy = K_2 + 0 \rightarrow$$
$$mgy = 0{,}4mg\ell \rightarrow y = 0{,}4\ell$$

α) Στη θέση Γ, η τάση του νήματος T_2, παίζει το ρόλο της κεντρομόλου, οπότε για το μέτρο της έχουμε:

$$T_2 = m\frac{\upsilon_2^2}{r} \xrightarrow{K_2=\frac{1}{2}m\upsilon_2^2} T_2 = \frac{2K_2}{\ell - y} \rightarrow$$
$$T_2 = \frac{2\cdot 0{,}4mg\ell}{\ell - 0{,}4\ell} = \frac{4}{3}mg$$

β) Ελάχιστα πριν το νήμα έρθει σε επαφή με το καρφί, το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας ℓ έχοντας ταχύτητα υ_1. Στο σώμα ασκούνται η τάση T_1 του νήματος και το βάρος, η συνισταμένη των οποίων μας δίνει την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη:

$$\Sigma F_y = m\frac{\upsilon_1^2}{r} \rightarrow T_1 - w = m\frac{\upsilon_1^2}{r} \xrightarrow{K_1=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2}$$
$$T_1 = mg + \frac{2K_1}{\ell} = mg + \frac{2\cdot mg\ell}{\ell} = 3mg$$

Μόλις το νήμα έρθει σε επαφή με το καρφί, ξεκινά την νέα κυκλική κίνηση με ακτίνα r=ℓ-y=0,6ℓ, οπότε η τάση του νήματος αποκτά νέα τιμή T_1':

$$\Sigma F_y = m\frac{\upsilon_1^2}{r} \rightarrow T_1' - w = m\frac{\upsilon_1^2}{r} \xrightarrow{K_1=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2}$$
$$T_1' = mg + \frac{2K_1}{0{,}6\ell} = mg + \frac{2\cdot mg\ell}{0{,}6\ell} = \frac{13}{3}mg$$

dmargaris@gmail.com