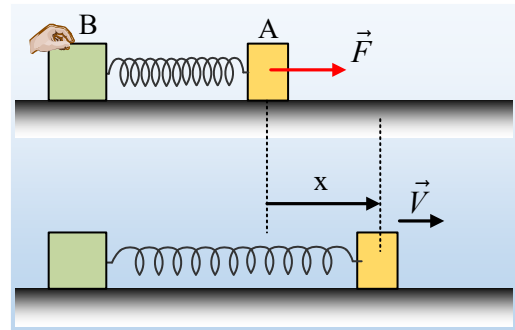


Η ορμή των σωμάτων και η δυναμική ενέργεια ελατηρίου

Σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δύο σώματα Α και Β με μάζας $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=2\text{kg}$ αντίστοιχα, δεμένα στα άκρα ενός ιδανικού ελατηρίου (αυτό θεωρείται αβαρές και περικλείει ενέργεια με τη μορφή της δυναμικής ενέργειας, όταν παραμορφώνεται). Σε μια στιγμή ασκούμε στο Α σώμα μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=36\text{N}$, τραβώντας το προς τα δεξιά, ενώ ταυτόχρονα, με το χέρι μας, συγκρατούμε το Β σώμα στη θέση του. Η



δύναμη ασκείται μέχρι τη στιγμή t_1 , όπου το σώμα έχει μετατοπισθεί κατά $x=0,5\text{m}$, έχοντας ταχύτητα μέτρου $V=4\text{m/s}$, οπότε καταργείται, ενώ ταυτόχρονα αφήνουμε ελεύθερο το σώμα Β.

- i) Να υπολογισθεί η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σύστημα μέσω του έργου της δύναμης F , στο παραπάνω χρονικό διάστημα. Τι ποσοστό της ενέργειας αυτής έχει αποθηκευτεί στο ελατήριο με τη μορφή της δυναμικής ενέργειας;
- ii) Μια επόμενη στιγμή t_2 η ορμή του Β σώματος αυξάνεται με ρυθμό $50\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$, ενώ κινείται προς τα δεξιά. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του Α σώματος την στιγμή αυτή;
- iii) Μια επόμενη στιγμή t_3 , το σώμα Α κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου $v_1=2\text{m/s}$. Για τη στιγμή αυτή:
 - α) Ποια η ταχύτητα του σώματος Β;
 - β) Πόση είναι η αποθηκευμένη ενέργεια στο ελατήριο;

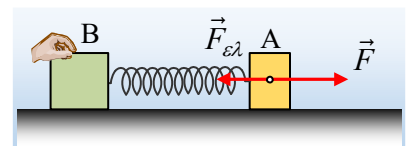
Απάντηση:

- i) Η ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα Α, μέσω του έργου της δύναμης είναι:

$$W_F = F \cdot x \cdot \sin 0^\circ = F \cdot x = 36 \cdot 0,5 \text{ J} = 18 \text{ J}$$

Τη στιγμή t_1 το σώμα Α έχει κινητική ενέργεια:

$$K_{A1} = \frac{1}{2} m_1 V^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 4^2 \text{ J} = 8 \text{ J}$$



Αλλά αν μέσω της δύναμης μεταφέρεται στο σώμα ενέργεια 18J , αφαιρείται ενέργεια μέσω της δύναμης που ασκείται πάνω του από το ελατήριο (την $F_{ελ}$), η οποία μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια του ελατηρίου. Έτσι από την διατήρηση της ενέργειας:

$$W_F = K_{A1} + U_l \rightarrow U_l = W_F - K_{A1} = 18 \text{ J} - 8 \text{ J} = 10 \text{ J}$$

Αλλά τότε το ζητούμενο ποσοστό είναι:

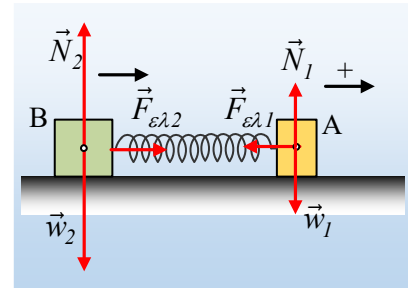
$$\pi = \frac{U_l}{W_F} 100\% = \frac{10 \text{ J}}{18 \text{ J}} 100\% = 55,6\%$$

- ii) Αφού το σώμα B κινείται προς τα δεξιά, έχει ορμή προς τα δεξιά και αν αυτή αυξάνεται, τότε ο ρυθμός μεταβολής της, έχει κατεύθυνση επίσης προς τα δεξιά. Ας πάρουμε την προς τα δεξιά κατεύθυνση λοιπόν ως θετική και ας εφαρμόσουμε τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα:

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \Sigma \vec{F} \rightarrow \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} = (\vec{w}_2 + \vec{N}_2) + \vec{F}_{\varepsilon\lambda 2} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta p_2}{\Delta t} = F_{\varepsilon\lambda 2} = +50 \text{ N}$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα μας λέει ότι η δύναμη που το ελατήριο ασκεί στο B σώμα, έχει φορά προς τα δεξιά (το ελατήριο έχει κάποια επιμήκυνση και τείνει να επανέλθει στο φυσικό μήκος του). Αλλά τότε το ελατήριο ασκεί στο A σώμα την δύναμη $F_{\varepsilon\lambda 1}$ με το ίδιο μέτρο, σύμφωνα με τον νόμο του Hooke ($F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta l$), με κατεύθυνση προς τα αριστερά, οπότε:



$$\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = F_{\varepsilon\lambda 1} = -50 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}$$

- iii) Με βάση το παραπάνω ερώτημα, το σύστημα των δύο σωμάτων μαζί με το ελατήριο, αποτελεί ένα μονωμένο σύστημα, στο οποίο η ορμή παραμένει σταθερή.

α) Εφαρμόζουμε την διατήρηση της ορμής μεταξύ της χρονικής στιγμής t_1 και t_3 και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{o\lambda 1} &= \vec{p}_{o\lambda 3} \rightarrow m_1 \vec{V} + 0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \xrightarrow{+ \rightarrow} \\ m_1 V &= m_1 v_1 + m_2 v_2 \xrightarrow{\text{αντικατάσταση}} 1 \cdot 4 = 1 \cdot 2 + 2 v_2 \rightarrow \\ v_2 &= 1 \text{ m} / \text{s} \end{aligned}$$

- β) Η μηχανική ενέργεια του παραπάνω συστήματος παραμένει σταθερή μεταξύ των στιγμών t_1 και t_3 , οπότε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} K_1 + U_1 &= K_3 + U_3 \rightarrow \\ \frac{1}{2} m_1 V^2 + U_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + U_3 \rightarrow \\ U_3 &= \frac{1}{2} m_1 V^2 + U_1 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \rightarrow \\ U_3 &= 8 \text{ J} + 10 \text{ J} - \frac{1}{2} 1 \cdot 2^2 \text{ J} - \frac{1}{2} 2 \cdot 1^2 \text{ J} = 15 \text{ J} \end{aligned}$$

Σχόλιο:

Παραπάνω η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, θεωρήθηκε άγνωστη, απλά δόθηκε ως δεδομένο ότι ...απλά υπάρχει! Σε επόμενο στάδιο βέβαια θα πρέπει και αυτή να διδαχτεί...