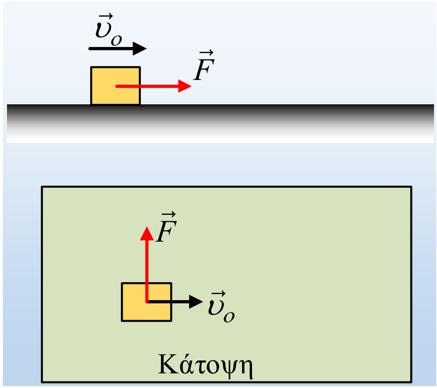
Μια δύναμη, μεταβάλλει την ορμή του σώματος



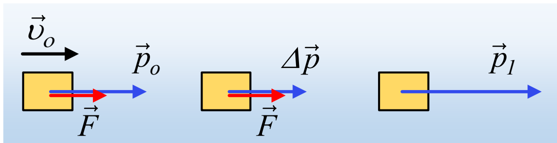
Ένα σώμα μάζας 2kg, κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα υ_o=2m/s. Σε μια στιγμή t_o=0 δέχεται μια σταθερή δύναμη, μέτρου F=0,75N, μέχρι τη στιγμή t_1=4s, η οποία έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας, όπως στο πάνω σχήμα.

i) Να υπολογιστεί η αρχική ορμή του σώματος, καθώς και η μεταβολή της ορμής του, η οποία οφείλεται στην δράση της δύναμης, μέχρι τη στιγμή t_1.

ii) Να βρεθεί η τελική ταχύτητα του σώματος, καθώς και η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σώμα, μέσω της δύναμης F.

iii) Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα, αν η ασκούμενη δύναμη ήταν κάθετη στην αρχική ταχύτητα, όπως φαίνεται στο κάτω σχήμα (σε κάτοψη).

Απάντηση:



i) Η αρχική ορμή του σώματος, έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας υ_o και μέτρο:

$$p_o = m\upsilon_o = 2kg \cdot 2m/s = 4kg \cdot m/s$$

Από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, παίρνουμε:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

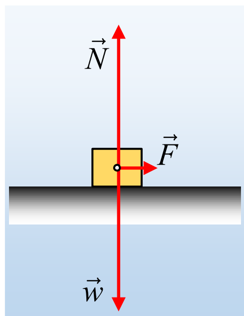
Πράγμα που σημαίνει ότι η μεταβολή της ορμής (το διάνυσμα $\Delta\vec{p}$) έχει την κατεύθυνση της δύναμης (ίδια με την κατεύθυνση της αρχικής ταχύτητας, όπως στο σχήμα) και μέτρο:

$$\Delta p = F \cdot \Delta t = F \cdot t_1 = 0,75 \cdot 4\ kg \cdot m/s = 3\ kg \cdot m/s$$

ii) Η παραπάνω μεταβολή της ορμής, γράφεται:

$$\Delta p = p_1 - p_o \rightarrow$$
$$p_1 = p_o + \Delta p = 4\ kg \cdot m/s + 3kg \cdot m/s = 7kg \cdot m/s$$

Όπου η τελική ορμή $\vec{p}_1$ έχει την ίδια κατεύθυνση με την αρχική, όπως στο σχήμα.



Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ της θέσης του σώματος τη στιγμή t_o και της θέσης του τη στιγμή t_1 και λαμβάνοντας υπόψη ότι στο σώμα εκτός της δύναμης F, ασκείται το βάρος και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου, όπως στο διπλανό σχήμα, (στην πραγματικότητα οι δύο κατακόρυφες δυνάμεις θα έπρεπε να σχεδιαστούν ως διανύσματα που έχουν πολύ μεγαλύτερα μήκη…) παίρνουμε:

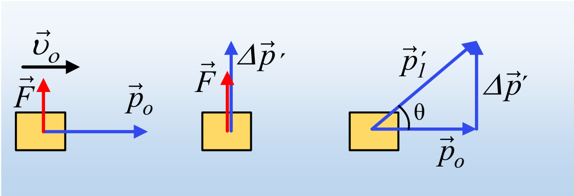
$$K_1 - K_o = W_w + W_N + W_F$$

Όπου $W_w = W_N = 0$, δυνάμεις κάθετες στη μετατόπιση, οπότε παίρνουμε:

$$W_F = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{p_1}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2}2\left(\frac{7}{2}\right)^2 J - \frac{1}{2}2\cdot 2^2 J = 8,25J$$

iii) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα, ταχύτητας, ορμής και δύναμης.



α) για τα μέτρα της αρχικής ταχύτητας και της μεταβολής της ορμής, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με τις τιμές που υπολογίσαμε στο ερώτημα i). Βέβαια το διάνυσμα $\Delta\vec{p}'$ είναι τώρα κάθετο στην διεύθυνση της αρχικής ορμής $\vec{p}_o$, όπως στο σχήμα.

β) Η μεταβολή της ορμής, που οφείλεται στην δύναμη γράφεται τώρα διανυσματικά:

$$\Delta\vec{p}' = \vec{p}_1' - \vec{p}_o \rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_o + \Delta\vec{p}'$$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι πρέπει να προσθέσουμε διανυσματικά τα διανύσματα της αρχικής ορμής και της μεταβολής της ορμής. Για το σκοπό αυτό καθιστούμε τα δύο διανύσματα διαδοχικά, όπως στο 3^o σχήμα παραπάνω, με αποτέλεσμα να σχηματίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο, η υποτείνουσα του οποίου μας δίνει την τελική ορμή $\vec{p}_1'$. Για το μέτρο της παίρνουμε από Π.Θ.:

$$p_1' = \sqrt{p_o^2 + (\Delta p')^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}kg\cdot m/s = \sqrt{25}kg\cdot m/s = 5kg\cdot m/s$$

Ενώ η διεύθυνσή της σχηματίζει με την διεύθυνση της αρχικής ορμής γωνία θ, όπου:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\Delta p}{p_o} = \frac{3}{4}$$

Ενώ για το έργο της δύναμης, ξανά με την ίδια λογική, θα έχουμε:

$$K_1' - K_o = W_w + W_N + W_F' \rightarrow$$

$$W_F' = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{p_1'}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2}2\left(\frac{5}{2}\right)^2 J - \frac{1}{2}2\cdot 2^2 J = 2,25J$$

dmargaris@gmail.com