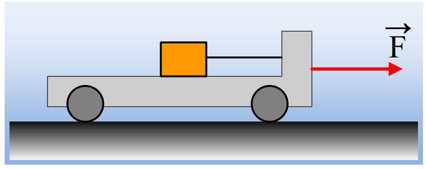
# *Ένα σύστημα επιταχύνεται.*




Σε λείο οριζόντιο επίπεδο σύρεται ένα αμαξίδιο μάζας 1kg, με την επίδραση μιας σταθερής οριζόντιας δύναμης F=12Ν. Πάνω στο αμαξίδιο, έχει προσδεθεί με νήμα ένα σώμα Σ, μάζας 0,2kg. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων είναι μ=0,5. Κάποια στιγμή $t_0=0$, το καροτσάκι έχει ταχύτητα 2m/s.

i) Να βρεθεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος τη στιγμή αυτή.

ii) Αν την παραπάνω χρονική στιγμή, κοπεί το νήμα:

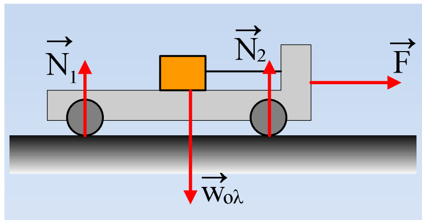
α) Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα και να τις διακρίνετε σε εσωτερικές και εξωτερικές για το σύστημα αμαξίδιο-σώμα Σ.

β) Να υπολογιστεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του αμαξιδίου 1s, μετά το κόψιμο του νήματος. Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις για το σώμα Σ;

γ) Να βρεθεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος τη στιγμή αυτή.

Δίνεται g=10m/s$^2$.

### *Απαντήσεις:*




Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα, όπου στον κατακόρυφο άξονα:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_1 + N_2 - (M+m)g = 0$$

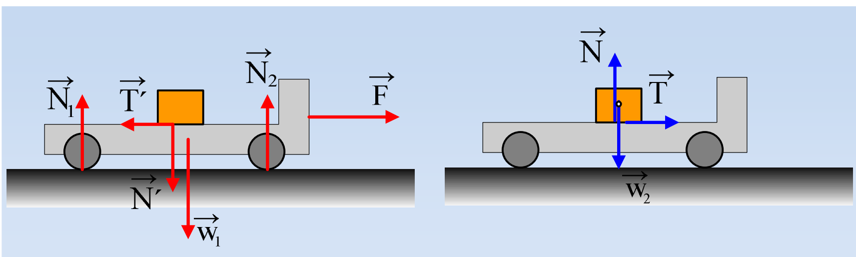
i) Η ορμή του συστήματος είναι ένα διάνυσμα οριζόντιο με φορά προς τα δεξιά και μέτρο:

$$P_{ολ} = (M+m)\upsilon_0 = (1+0,2)\cdot 2kgm/s = 2,4kgm/s$$

$$\text{Ενώ } \frac{\Delta \vec{P}_{ολ}}{\Delta t} = \Sigma \vec{F}_{εξ} \rightarrow \frac{\Delta P_{ολ}}{\Delta t} = F = 12kg\cdot m/s^2$$

Με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

ii) Μόλις κοπεί το νήμα, οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα, είναι αυτές του παρακάτω σχήματος:




Όπου αριστερά οι δυνάμεις στο αμαξίδιο και δεξιά στο σώμα Σ.

α) Εξωτερικές για το σύστημά μας είναι οι δυνάμεις: τα βάρη $w_1$ και $w_2$, οι αντιδράσεις του επιπέδου $N_1$ και $N_2$ και η δύναμη F.

Εσωτερικές οι: Τριβή Τ και η αντίδρασή της Τ΄, και οι κάθετες αντιδράσεις Ν και Ν΄.

β) Το ερώτημα που ανακύπτει είναι, αν η τριβή που θα εμφανιστεί μεταξύ αμαξιδίου και σώματος είναι στατική τριβή (οπότε τα σώματα κινούνται μαζί) ή τριβή ολίσθησης, οπότε το σώμα Σ ολισθαίνει πάνω στο αμαξίδιο. Ελέγχουμε, υποθέτοντας ότι τα δυο σώματα κινούνται μαζί.

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για κάθε σώμα παίρνουμε:

Αμαξίδιο: $\Sigma F_x=M\cdot\alpha \rightarrow F-T'=M\cdot\alpha$ (1)

Σώμα Σ: $\Sigma F_x=m\cdot\alpha \rightarrow T=m\cdot\alpha$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$F=(M+m)\cdot\alpha \rightarrow a=\frac{F}{M+m}\xrightarrow{(2)}T=\frac{m}{M+m}F=\frac{0,2}{1+0,2}12N=2N$$

Αλλά η τριβή που μπορεί να ασκηθεί μεταξύ των δύο σωμάτων μπορεί να πάρει μέγιστη τιμή $T_{max}=T_{o\lambda}=\mu N=\mu mg=0,5\cdot 0,2\cdot 10N=1N$, συνεπώς η υπόθεσή μας, ότι τα σώματα συνεχίζουν να κινούνται μαζί, ήταν εσφαλμένη. Το σώμα Σ γλιστράει πάνω στο αμαξίδιο και η ασκούμενη τριβή, είναι τριβή ολίσθησης με μέτρο Τ=1Ν. Αλλά τότε από τις εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε:

Αμαξίδιο: $a_1=\frac{F-T'}{M}=\frac{12N-1N}{1kg}=11m/s^2$

Σώμα Σ: $a_2=\frac{T}{m}=\frac{1}{0,2}m/s^2=5m/s^2$

Και οι ταχύτητες που θα έχουν τα σώματα τη στιγμή $t_1$=1s θα είναι:

$$\upsilon_1=\upsilon_0+\alpha_1\cdot t_1=2m/s+11\cdot 1m/s=13m/s$$

$$\upsilon_2=\upsilon_0+\alpha_2\cdot t_2=2m/s+5\cdot 1m/s=7m/s.$$

Με βάση αυτά θα έχουμε:

Για το αμαξίδιο: $P_1=M\upsilon_1=1\cdot 13kgm/s=13kgm/s$ και $\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}=\Sigma\vec{F}\rightarrow\frac{\Delta P_1}{\Delta t}=F-T'=11kg\cdot m/s^2$.

Σώμα Σ: $P_2=m\upsilon_2=0,2\cdot 7kgm/s=1,4kgm/s$ και $\frac{\Delta\vec{P}_2}{\Delta t}=\Sigma\vec{F}\rightarrow\frac{\Delta P_2}{\Delta t}=T=1kg\cdot m/s^2$

γ) Η ορμή του συστήματος είναι:

$$\vec{P}_{o\lambda}=\vec{P}_1+\vec{P}_2\rightarrow P_{o\lambda}=P_1+P_2=(13+1,4)kgm/s=14,4kg\cdot m/s$$

Κι ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος:

$$\frac{\Delta\vec{P}_{o\lambda}}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{P}_1}{\Delta t}+\frac{\Delta\vec{P}_2}{\Delta t}\rightarrow\frac{\Delta P_{o\lambda}}{\Delta t}=\frac{\Delta P_1}{\Delta t}+\frac{\Delta P_2}{\Delta t}=(11+1)kg\cdot m/s^2=12kg\cdot m/s^2$$

Προφανώς και τα δύο διανύσματα (ορμή και ρυθμός μεταβολής της ορμής) είναι διανύσματα οριζόντια με φορά προς τα δεξιά.

**Σχόλια:**

1) Από τη στιγμή που έχουμε ένα σύστημα, το οποίο δέχεται εξωτερική δύναμη F=12N, ισχύει:

$$\frac{\Delta\vec{P}_{o\lambda}}{\Delta t}=\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi}\rightarrow\frac{\Delta P_{o\lambda}}{\Delta t}=F\rightarrow\Delta P_{o\lambda}=F\cdot\Delta t\rightarrow P_{t_1}-P_{t_0}=F\cdot\Delta t\rightarrow$$

$$P_{t_1}=P_{t_0}+F\cdot\Delta t=2{,}4kgm/s+12\cdot 1kgm/s=14{,}4kg\cdot m/s$$

$$\text{Ενώ }\frac{\Delta\vec{P}_{o\lambda}}{\Delta t}=\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi}\rightarrow\frac{\Delta P_{o\lambda}}{\Delta t}=F=12kg\cdot m/s^2.$$

Την ίδια λογική θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε για να υπολογίσουμε ορμές για κάθε σώμα, στο β) υποερώτημα:

$$\frac{\Delta\vec{P}_1}{\Delta t}=\Sigma\vec{F}\rightarrow\frac{\Delta P_1}{\Delta t}=F-T'\rightarrow\Delta P_1=(F-T')\cdot\Delta t\rightarrow P_1-P_{t_0}=(F-T')\cdot\Delta t\rightarrow$$

$$P_1=M\upsilon_0+(F-T')\cdot\Delta t=2kgm/s+(12-1)1kgm/s=13kg\cdot m/s$$

Ομοίως για το σώμα Σ:

$$\frac{\Delta\vec{P}_2}{\Delta t}=\Sigma\vec{F}\rightarrow\frac{\Delta P_2}{\Delta t}=T\rightarrow\Delta P_2=T\cdot\Delta t\rightarrow P_2-P_{t_0}=T\cdot\Delta t\rightarrow$$

$$P_2=m\upsilon_0+T\cdot\Delta t=0{,}4kgm/s+1\cdot 1kgm/s=1{,}4kg\cdot m/s$$

2) Δεν μας δόθηκε ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής, οπότε δεχτήκαμε ότι συμπίπτει με το συντελεστή τριβής ολίσθησης. Δεχτήκαμε με άλλα λόγια ότι η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής είναι ίση με την τριβή ολίσθησης.

**dmargaris@sch.gr**