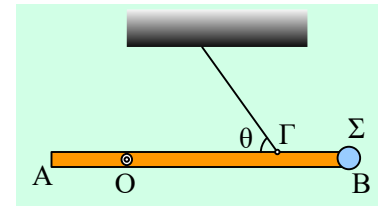


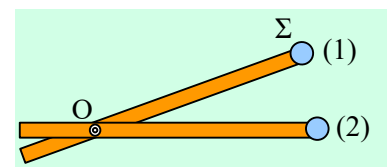
Η ισορροπία και η περιστροφή ενός στερεού.

Ένα στερεό s αποτελείται από μια ομογενή ράβδο μάζας $M=3\text{kg}$, μήκους $(AB)=l=4\text{m}$, στο άκρο B της οποίας έχει προσδεθεί ένα σημειακό υλικό σημείο Σ μάζας $m=1\text{kg}$. Το στερεό s μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το σημείο O , το οποίο απέχει 1m από το άκρο A της ράβδου, όπως στο σχήμα. Το στερεό s ισορροπεί με τη ράβδο οριζόντια, δεμένο με νήμα στο σημείο Γ , όπου $(OG)=2\text{m}$, δεμένο σε ταβάνι. Το νήμα σχηματίζει γωνία θ με τη ράβδο, όπου $\eta\mu\theta=0,8$ και $\sigma\upsilon\eta\theta=0,6$.



i) Να υπολογισθεί η τάση του νήματος και η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από το υλικό σημείο Σ .

Ελευθερώνουμε το στερεό από το νήμα, το φέρνουμε στη θέση (1) του διπλανού σχήματος και το αφήνουμε να περιστραφεί. Μετά από λίγο το στερεό περνά από την θέση (2) με τη ράβδο οριζόντια, έχοντας γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega=2\text{rad/s}$ και γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_r=15/4\text{ rad/s}^2$, της ίδιας κατεύθυνσης. Για τη στιγμή αυτή να βρεθούν:



ii) Η ταχύτητα του υλικού σημείου Σ , καθώς και η οριζόντια και κατακόρυφη επιτάχυνσή του.

iii) Η δύναμη που το σώμα Σ ασκεί στη ράβδο.

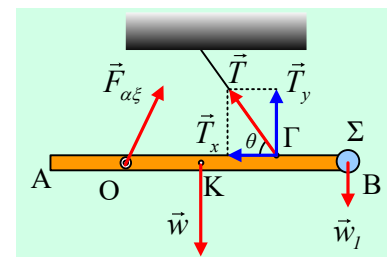
iv) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του υλικού σημείου Σ ως προς τον άξονα περιστροφής.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

i) Εξετάζουμε την ισορροπία του στερεού s (ενός συστήματος σωμάτων) οπότε στη φάση αυτή, δεν μας ενδιαφέρουν οι εσωτερικές δυνάμεις. Έτσι σχεδιάζουμε τις δυνάμεις όπως στο διπλανό σχήμα. Από την ισορροπία του στερεού παίρνουμε:

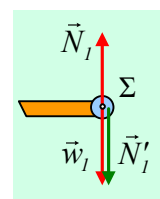
$$\Sigma F = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma \tau = 0 \quad (2)$$



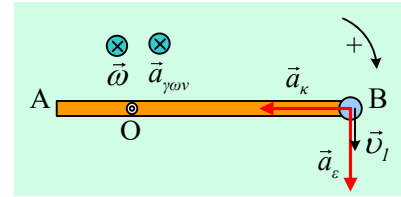
Εφαρμόζοντας την εξίσωση (2) ως προς τον άξονα στο O , θα έχουμε:

$$\begin{aligned} T_y \cdot (OG) - W \cdot (OK) - W_l \cdot (OB) + F_{a\xi} \cdot 0 &= 0 \rightarrow \\ T \cdot \eta\mu\theta \cdot (OG) - Mg \cdot (OK) - mg \cdot (OB) &= 0 \xrightarrow[\text{(S.I.)}]{\text{αντικ.}} \\ T \cdot 0,8 \cdot 2 = 30 \cdot 1 + 10 \cdot 3 \rightarrow T &= \frac{60}{1,6} \text{ N} = 37,5 \text{ N} \end{aligned}$$

Αν τώρα έρθουμε στην ισορροπία του υλικού σημείου Σ , τότε αυτό δέχεται από την ράβδο μια δύναμη αντίθετη του βάρους, αφού $\Sigma F=0$, ας την ονομάσουμε $N_1=mg=10\text{N}$. Αλλά τότε το Σ ασκεί στη ράβδο την αντίδρασή της N_1' κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω, μέτρου 10N , όπως στο σχήμα.



- ii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί η ταχύτητα του υλικού σημείου Σ, καθώς και η επιτρόχια (κατακόρυφη) επιτάχυνση και κεντρομόλος (οριζόντια) επιτάχυνσή του. Η ταχύτητα κάθετη στην ακτίνα της κυκλικής τροχιάς OB, συνεπώς κατακόρυφη, μέτρου:



$$v_l = \omega R = \omega \cdot (OB) = 2 \cdot 3 \text{ m/s} = 6 \text{ m/s}$$

Το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης, ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητα, είναι ίσο:

$$\alpha_\epsilon = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = a_{\gamma\omega\nu} R = \frac{15}{4} \cdot 3 \text{ m/s}^2 = 11,25 \text{ m/s}^2.$$

Ενώ η κεντρομόλος επιτάχυνση με κατεύθυνση προς τον άξονα, έχει μέτρο:

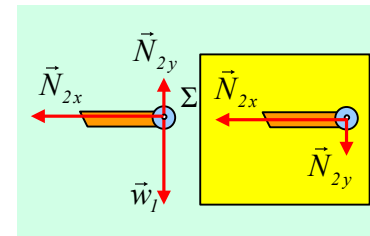
$$\alpha_\kappa = \omega^2 R = 2^2 \cdot 3 \text{ m/s}^2 = 12 \text{ m/s}^2.$$

- iii) Πάμε ξανά στο σώμα Σ, σχεδιάζοντας τις δυνάμεις, όπως στο αριστερό σχήμα, δίπλα. Οπότε με βάση τις δύο παραπάνω επιταχύνσεις που βρήκαμε, θα έχουμε:

$$\Sigma F_x = ma_x \rightarrow N_{2x} = ma_\kappa = 1 \cdot 12 \text{ N} = 12 \text{ N}$$

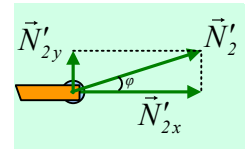
$$\Sigma F_y = ma_y \rightarrow mg - N_{2y} = ma_\epsilon \rightarrow$$

$$N_{2y} = mg - ma_\epsilon = m(g - a_\epsilon) = 1 \cdot (10 - 11,25) \text{ N} = -1,25 \text{ N}$$



Το αρνητικό πρόσημο για την συνιστώσα N_{2y} , σημαίνει ότι έχει αντίθετη φορά από αυτή που σχεδιάστηκε στο σχήμα, έχοντας φορά προς τα κάτω, όπως στο δεξιό σχήμα.

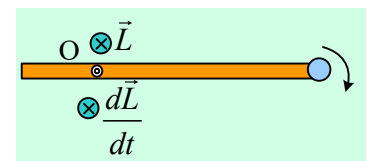
Πηγαίνοντας τώρα στη ράβδο, δέχεται από το υλικό σημείο τις αντιδράσεις των δύο παραπάνω συνιστωσών της δύναμης N_2 , όπως στο διπλανό σχήμα.



$$N'_2 = \sqrt{N'^2_{2x} + N'^2_{2y}} = \sqrt{12^2 + 1,25^2} \text{ N} \approx 12 \text{ N}$$

Με διεύθυνση, όπου: $\epsilon\phi\phi = \frac{N'_{2y}}{N'_{2x}} = \frac{1,25}{12} = 0,1$

- iv) Η στροφορμή του υλικού σημείου Σ, ως προς τον άξονα περιστροφής στο O, έχει τη διεύθυνση του άξονα, κάθετη στο επίπεδο της σελίδας και φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα με μέτρο:



$$L = mvR = mv \cdot (OB) = 1 \cdot 6 \cdot 3 \text{ kgm}^2/\text{s} = 18 \text{ kgm}^2/\text{s}.$$

Την ίδια διεύθυνση, πάνω στον άξονα και την ίδια φορά έχει και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ, ως προς τον άξονα, με μέτρο:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau_o = \Sigma F_y \cdot (OB) = ma_\epsilon \cdot (OB) = 1 \cdot 11,25 \cdot 3 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 = 33,75 \text{ kgm}^2/\text{s}^2.$$

dmargaris@gmail.com