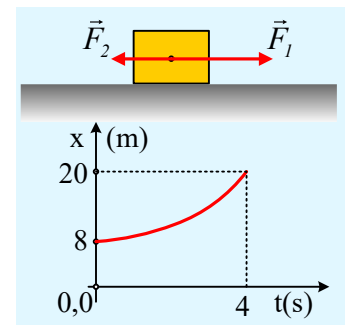


Όταν καταργείται η μία δύναμη.

Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή $t=0$ ασκούνται πάνω του δύο σταθερές οριζόντιες δυνάμεις F_1 και $F_2=2N$, με αποτέλεσμα η θέση του, κατά μήκος ενός προσανατολισμένου άξονα x' , να μεταβάλλεται όπως στο διάγραμμα.



- Να υπολογιστεί η επιτάχυνση με την οποία κινήθηκε το σώμα και η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή $t_1=4s$.
- Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης F_1 ;
- Τη χρονική στιγμή t_1 , η δύναμη F_1 παύει να ασκείται.
 - Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος τις χρονικές στιγμές $t_2=10s$ και $t_3=12s$.
 - Να υπολογισθεί το έργο κάθε δύναμης μέχρι τη χρονική στιγμή t_3 .

Απάντηση:

- Η μετατόπιση του σώματος από 0-4s είναι $\Delta x_I = x_I - x_0 = 20m - 8m = 12m$, ενώ αφού οι δυο δυνάμεις είναι σταθερές το σώμα αποκτά σταθερή επιτάχυνση, με αποτέλεσμα η κίνησή του να είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (επιταχυνόμενη) για την οποία ισχύουν οι εξισώσεις:

$$v = \alpha_I t \quad (1) \quad \Delta x = \frac{1}{2} \alpha_I t^2 \quad (2)$$

Από την εξίσωση (2) βρίσκουμε για την επιτάχυνση α_I :

$$\Delta x_I = \frac{1}{2} \alpha_I t_I^2 \rightarrow 2 \Delta x_I = \alpha_I t_I^2 \rightarrow \alpha_I = \frac{2 \Delta x_I}{t_I^2} = \frac{2 \cdot 12m}{4^2 s^2} = 1,5 m/s^2.$$

Και με αντικατάσταση στην εξίσωση (1):

$$v_I = \alpha_I t_I = 1,5 \cdot 4m/s = 6m/s$$

- Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής, για το παραπάνω χρονικό διάστημα, παίρνουμε:

$$\Sigma F = ma_I \rightarrow F_I - F_2 = ma_I \rightarrow F_I = F_2 + ma_I = 2N + 2 \cdot 1,5N = 5N$$

- Μόλις πάψει να ασκείται η δύναμη F_1 , τότε το σώμα αποκτά επιτάχυνση α_2 , όπου:

$$\Sigma F = ma_2 \rightarrow -F_2 = ma_2 \rightarrow a_2 = \frac{-F_2}{m} = \frac{-2}{2} m/s^2 = -1m/s^2.$$

Οπότε για τη νέα ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, αντί για τις εξισώσεις (1) και (2), θα ισχύουν οι εξισώσεις:

$$v = v_I + \alpha_2 \cdot \Delta t \quad (1a) \quad \Delta x = v_I \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_2 (\Delta t)^2 \quad (2a)$$

- Από την εξίσωση (1^α) για την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή $t_2=10s$, όπου $\Delta t_2=10s-4s=6s$, παίρνουμε

$$v_2 = v_1 + a_2 \cdot \Delta t_2 = 6 \text{ m/s} + (-1) \cdot 6 \text{ m/s} = 0$$

Με την ίδια λογική, τη στιγμή t_3 , όπου $\Delta t_3 = t_3 - t_1 = 12 \text{ s} - 4 \text{ s} = 8 \text{ s}$, θα έχουμε:

$$v_3 = v_1 + a_2 \cdot \Delta t_3 = 6 \text{ m/s} + (-1) \cdot 8 \text{ m/s} = -2 \text{ m/s}.$$

Δηλαδή τη στιγμή t_2 το σώμα σταματά να κινείται προς τα δεξιά και αρχίζει να επιταχύνεται προς τα αριστερά, προς την αρνητική κατεύθυνση, με αποτέλεσμα τη στιγμή t_3 να κινείται με ταχύτητα μέτρου 2 m/s με φορά προς τα αριστερά.

β) Το έργο της δύναμης F_1 για όσο χρόνο ασκείται στο σώμα, είναι ίσο:

$$W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = 5 \text{ N} \cdot 12 \text{ m} = 60 \text{ J}$$

Το αντίστοιχο έργο της δύναμης F_2 μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση υπολογισμού του έργου:

$$W_2 = F_2 \cdot \Delta x_{\text{ολ}} \cdot \cos \alpha \quad (3)$$

Αρκεί να βρούμε τη συνολική μετατόπιση και τη γωνία μεταξύ δύναμης και μετατόπισης.

Από την εξίσωση (2^α) βρίσκουμε την μετατόπιση του σώματος από 4s-12s:

$$\Delta x_3 = v_1 \cdot \Delta t_3 + \frac{1}{2} a_2 (\Delta t_3)^2 = 6 \cdot 8 \text{ m} + \frac{1}{2} (-1) \cdot 8^2 \text{ m} = 16 \text{ m}$$

Συνεπώς η συνολική μετατόπιση του σώματος από 0-12s, είναι ίση με:

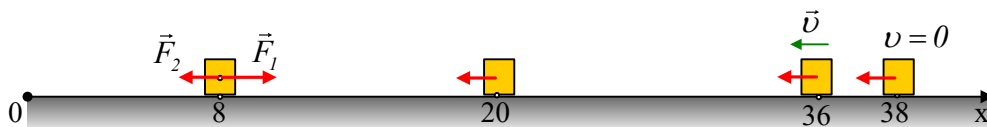
$$\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_3 = 12 \text{ m} + 16 \text{ m} = 28 \text{ m}$$

Συνεπώς η γωνία μεταξύ δύναμης και μετατόπισης είναι $\alpha = 180^\circ$, αφού προέκυψε θετική απομάκρυνση και έχουμε δύναμη προς την αρνητική κατεύθυνση. Οπότε με αντικατάσταση στην εξίσωση (3), παίρνουμε:

$$W_2 = F_2 \cdot \Delta x_{\text{ολ}} \cdot \cos \alpha = 2 \text{ N} \cdot 28 \text{ m} \cdot (-1) = -56 \text{ J}.$$

Σχόλια:

1) Θα μπορούσαμε να «σπάσουμε» την κίνηση του σώματος, κατά τη διάρκεια της άσκησης της F_2 .



Από t_1 έως t_2 όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος το σώμα μετατοπίζεται κατά:

$$\Delta x_{2\alpha} = v_1 \cdot \Delta t_2 + \frac{1}{2} a_2 (\Delta t_2)^2 = 6 \cdot 6 \text{ m} + \frac{1}{2} (-1) \cdot 6^2 \text{ m} = 18 \text{ m}$$

Συνεπώς από 0-10s η δύναμη F_2 παράγει έργο:

$$W_{2\alpha} = |F_2| \cdot |\Delta x_1 + \Delta x_{2\alpha}| \cdot \cos \alpha = 2 \text{ N} \cdot (12 \text{ m} + 18 \text{ m}) \cdot (-1) = -60 \text{ J}$$

Στη συνέχεια το σώμα επιταχύνεται προς τα αριστερά κατά:

$$\Delta x_{2\beta} = \frac{1}{2} a_2 (\Delta t_{2\beta})^2 = \frac{1}{2} (-1) \cdot (8-6)^2 m = -2m$$

Οπότε η δύναμη παράγει έργο επιπλέον:

$$W_{2\beta} = |F_2| \cdot |\Delta x_{2\beta}| \cdot \cos 0^\circ = 2N \cdot 2m = +4J$$

Οπότε το συνολικό έργο της F_2 είναι:

$$W_2 = W_{2\alpha} + W_{2\beta} = -60J + 4J = -56J$$

- 2) Υπάρχει βέβαια πάντα και το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα! Ας το εφαρμόσουμε ανάμεσα στις θέσεις για $t=0$ και $t=12s$:

$$K_3 - K_0 = W_1 + W_2 \rightarrow \frac{1}{2} m v_3^2 - 0 = W_1 + W_2 \rightarrow$$

$$W_2 = \frac{1}{2} m v_3^2 - W_1 = \frac{1}{2} 2 \cdot 2^2 J - 60J = -56J$$

dmargaris@gmail.com