

Διαφορικά... από Chatgpt

Πώς ορίζεται το διαφορικό dy μιας συνάρτησης $y=f(x)$;

Το διαφορικό dy μιας συνάρτησης $y = f(x)$ ορίζεται με βάση την παράγωγο της συνάρτησης.

Συγκεκριμένα, αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x , τότε:

$$dy = f'(x) dx$$

Δηλαδή:

- dx είναι μια πολύ μικρή μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής x
- dy είναι η αντίστοιχη **γραμμική προσέγγιση** της μεταβολής της συνάρτησης

Με απλά λόγια:

Το διαφορικό dy εκφράζει πόσο περίπου αλλάζει η τιμή της συνάρτησης όταν το x αλλάζει κατά dx , χρησιμοποιώντας την κλίση της εφαπτομένης (δηλαδή την παράγωγο).

👉 Άρα, το dy δεν είναι η ακριβής μεταβολή, αλλά μια **καλή προσέγγιση** της μεταβολής:

$$\Delta y \approx dy$$

Αν θέλεις, μπορώ να σου δείξω και ένα παράδειγμα για να το δεις στην πράξη 👍

και το αντίστοιχο dx που χρησιμοποίησες παραπάνω στον ορισμό;

Καλή ερώτηση — γιατί το dx είναι βασικό για να καταλάβεις τι είναι το διαφορικό.

Τι είναι το dx ;

Το dx ορίζεται ως μια **αυθαίρετη (πολύ μικρή) μεταβολή** της μεταβλητής x .

Δηλαδή:

- Διαλέγουμε ένα μικρό αριθμό και τον ονομάζουμε dx
- Αυτός παίζει τον ρόλο της μεταβολής του x

👉 Δεν προκύπτει από τύπο — **τον ορίζουμε εμείς**

Πώς συνδέεται με το dy ;

Μόλις ορίσουμε το dx , τότε το διαφορικό dy δίνεται από:

$$dy = f'(x) dx$$

Άρα:

- Το dx είναι η «είσοδος» (μικρή αλλαγή στο x)
 - Το dy είναι η «έξοδος» (προσέγγιση της αλλαγής στο y)
-

Σχέση με την πραγματική μεταβολή

Αν πάρεις μια πραγματική μεταβολή Δx , τότε:

- συνήθως θέτουμε $dx = \Delta x$
- και τότε:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

ενώ

$$dy = f'(x) dx$$

👉 Το dy είναι η γραμμική προσέγγιση του Δy

Με μία φράση

- ✓ Το dx είναι μια μικρή μεταβολή που επιλέγουμε για το x
 - ✓ Το dy είναι η μεταβολή που προβλέπει η παράγωγος για αυτή τη μεταβολή
-
-

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2$$

και σημείο $x = 2$

Η παράγωγος είναι:

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$$

Άρα:

$$dy = 4 dx$$

♦ Περίπτωση 1: Μικρό dx

Έστω:

$$dx = 0.1$$

Υπολογίζουμε:

- Διαφορικό:

$$dy = 4 \cdot 0.1 = 0.4$$

- Πραγματική μεταβολή:

$$\Delta y = f(2.1) - f(2) = 2.1^2 - 2^2 = 4.41 - 4 = 0.41$$

👉 Σύγκριση:

- $dy = 0.4$
- $\Delta y = 0.41$

✓ Πολύ κοντά!

◆ Περίπτωση 2: Μεγάλο dx

Έστω:

$$dx = 1$$

Υπολογίζουμε:

- Διαφορικό:

$$dy = 4 \cdot 1 = 4$$

- Πραγματική μεταβολή:

$$\Delta y = f(3) - f(2) = 9 - 4 = 5$$

👉 Σύγκριση:

- $dy = 4$
- $\Delta y = 5$

! Μεγάλη διαφορά

🔍 Συμπέρασμα

- Όταν dx είναι μικρό $\rightarrow dy \approx \Delta y$
 - Όταν dx μεγαλώνει \rightarrow η προσέγγιση χαλάει
-

💡 Διαισθητικά

Το dy “ακολουθεί” την εφαπτομένη, όχι την καμπύλη.

👉 Κοντά στο σημείο → σχεδόν ίδιες

👉 Μακριά → αποκλίνουν

Αν θέλεις, μπορώ να σου το δείξω και με σχήμα (καμπύλη + εφαπτομένη), που το κάνει ακόμα πιο ξεκάθαρο.

και ο συμβολισμός dy/dx δείχνει την παράγωγο;

Ναι — ο συμβολισμός $\frac{dy}{dx}$ δείχνει την παράγωγο, αλλά έχει και μια πιο βαθιά ερμηνεία 🙌

◆ Βασική σημασία

Αν $y = f(x)$, τότε:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

👉 Δηλαδή είναι απλώς ένας άλλος τρόπος να γράψουμε την παράγωγο.

◆ Σύνδεση με τα διαφορικά

Θυμήσου ότι είχαμε:

$$dy = f'(x) dx$$

Αν «λύσουμε» ως προς $\frac{dy}{dx}$, παίρνουμε:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

👉 Έτσι φαίνεται σαν λόγος δύο διαφορικών

◆ Είναι πραγματικό κλάσμα;

Εδώ είναι το ενδιαφέρον:

✓ Στο σχολείο:

Το $\frac{dy}{dx}$ το χειριζόμαστε σαν **σύμβολο της παραγώγου**

✓ Σε πιο προχωρημένα μαθηματικά:

👉 Δεν είναι κανονικό κλάσμα, αλλά **συμβολισμός (του Gottfried Wilhelm Leibniz)**

◆ Παρ' όλα αυτά...

Παρότι δεν είναι «κανονικό κλάσμα», μπορούμε συχνά να το χειριζόμαστε σαν να είναι, και αυτό δουλεύει σωστά σε πολλές περιπτώσεις!

Παράδειγμα (αλυσίδα):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

👉 Μοιάζει σαν να «απλοποιείται» το du

◆ Διαισθητική ερμηνεία

$$\frac{dy}{dx}$$

σημαίνει:

👉 «πόσο αλλάζει το y όταν αλλάζει το x »

◆ Συμπέρασμα

- ✓ Ναι, το $\frac{dy}{dx}$ είναι η παράγωγος
- ✓ Συνδέεται με τα διαφορικά dy και dx
- ✓ Δεν είναι ακριβώς κλάσμα, αλλά συμπεριφέρεται συχνά σαν να είναι

Για την αντιγραφή:

dmargaris@gmail.com