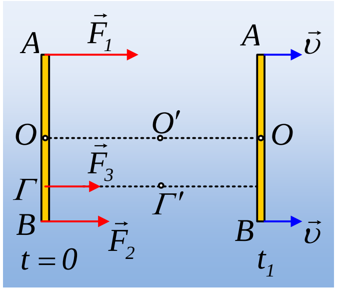
Επιταχυνόμενη ράβδος και ροπές.



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια ράβδος μήκους 2m και μάζας 10kg. Τη στιγμή t=0, ασκούνται στη ράβδο τρεις σταθερές οριζόντιες δυνάμεις, κάθετες στη ράβδο, όπως στο σχήμα, όπου F_1=9N και F_2=6N. Τη στιγμή t_1=2s, τα άκρα της ράβδου έχουν ταχύτητες $\upsilon_A=\upsilon_B=\upsilon$=4m/s.

i) Να υπολογιστεί το μέτρο της τρίτης δύναμης F_3.

ii) Να βρεθεί η απόσταση ΟΓ, του σημείου εφαρμογής της δύναμης F_3 από το μέσον Ο της ράβδου.

iii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου, ως προς κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά:

α) από το σημείο Ο΄

β) από το σημείο Γ΄.

του σχήματος.

Απάντηση:

i) Αφού στην ράβδο ασκούνται σταθερές δυνάμεις (σταθερής διεύθυνσης και μέτρου) η ράβδος θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση, κάθετη στη ράβδο και αφού τα άκρα της ράβδου έχουν την ίδια ταχύτητα, τη στιγμή t_1 όλα τα σημεία της ράβδου, έχουν την ίδια ταχύτητα, η κίνησή της είναι μεταφορική. Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma F=m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F_1+F_2+F_3=m\cdot\alpha_{cm} \quad (1)$$

Αλλά αφού οι ασκούμενες δυνάμεις είναι σταθερές και η επιτάχυνση της ράβδου είναι σταθερή και η κίνησή της, είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, για την οποία $\upsilon=\alpha\cdot t$ ή

$$\alpha=\alpha_{cm}=\frac{\upsilon}{t_1}=\frac{4}{2}m/s^2=2m/s^2.$$

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$F_3=m\cdot\alpha_{cm}-F_1-F_2=10\cdot 2N-9N-6N=5N.$$

ii) Από τη στιγμή που η ράβδος δεν περιστρέφεται η γωνιακή της επιτάχυνση είναι μηδενική. Αλλά τότε από το 2ο νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_o=I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}=0$$

Δηλαδή **το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών, όλων των δυνάμεων, ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που περνά από το κέντρο μάζας της, είναι ίσο με μηδέν**. Θεωρώντας τις αριστερόστροφες ροπές θετικές έχουμε:

$$-F_1\frac{\ell}{2}+F_2\frac{\ell}{2}+F_3x=0 \rightarrow x=\frac{(F_1-F_2)\ell}{2F_3}=\frac{(9-6)2}{2\cdot 5}m=0{,}6m$$

Όπου x=(ΟΓ) η απόσταση του σημείου εφαρμογής της δύναμης F_3 από το μέσον Ο της ράβδου.

iii) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau$$

Έτσι αναφερόμενοι στο σταθερό σημείο Ο΄ έχουμε (θεωρούμε τις δεξιόστροφες ροπές θετικές):

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_o = \Sigma\tau_o = F_1\frac{\ell}{2} - F_2\frac{\ell}{2} - F_3(O\Gamma) = 9\cdot 1Nm - 6\cdot 1Nm - 5\cdot 0{,}6Nm = 0$$

Ενώ ως προς ένα σταθερό σημείο Γ΄ (μπορείτε να θεωρείστε σαν σημείο και το σημείο Γ της ράβδου στην αρχική της θέση, δεν αλλάζει κάτι), έχουμε:

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\Gamma'} = \Sigma\tau_{\Gamma'} = F_1(A\Gamma) - F_2(\Gamma B) - F_3\cdot 0 = 9\cdot 1{,}6\,Nm - 6\cdot 0{,}4Nm = 12kg\cdot m^2/s^2.$$

Σχόλιο:

Η ράβδος εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση, χωρίς να περιστρέφεται, αφού η συνισταμένη ροπή ως προς το κέντρο μάζας είναι μηδενική.

Δεν είναι μηδενικό όμως το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο. Ως προς κάθε άλλο σημείο υπάρχει συνολική ροπή, η οποία ισούται με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου, ως προς το σημείο αυτό. Για παράδειγμα:

Ως προς το σημείο Γ΄η ράβδος έχει στροφορμή:

$$L = m\upsilon_{cm}R = m\upsilon(O\Gamma)$$

Οπότε ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου είναι:

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\Gamma'} = \frac{d[m\upsilon(O\Gamma)]}{dt} = m\frac{d\upsilon}{dt}(O\Gamma) = ma_{cm}(O\Gamma) = 10\cdot 2\cdot 0{,}6kg\cdot m^2/s^2 = 12kg\cdot m^2/s^2.$$

Τιμή που υπολογίσαμε παραπάνω, παίρνοντας τις ροπές ως προς το σημείο Γ΄.

dmargaris@gmail.com