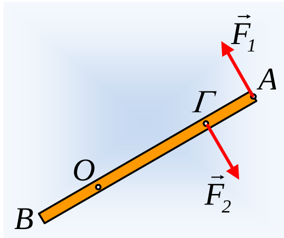
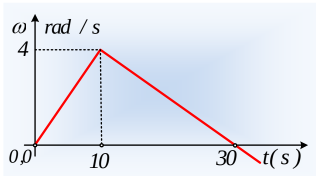
Η επιτάχυνση και η επιβράδυνση της δοκού.



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια ομογενής δοκός (ΑΒ) μήκους 4m και μάζας 30kg, η οποία μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το σημείο Ο της δοκού. Σε μια στιγμή, ασκούνται στη δοκό δυο οριζόντιες δυνάμεις $F_1=F_2=28N$, ίδιας διεύθυνσης και αντίθετης φοράς και διαρκώς κάθετες στη δοκό, όπως στο σχήμα (κάτοψη), όπου (ΑΓ)=d=1m. Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνεται στο διπλανό σχήμα, όπου τη στιγμή $t_1=10s$ μεταβάλλεται το μέτρο της μιας από τις παραπάνω δυνάμεις.



i) Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της δοκού από 0-10s, καθώς και η γωνία που στρέφεται η δοκός στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

ii) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς τον άξονα περιστροφής στο Ο, καθώς και η απόσταση του Ο από το άκρο Β της δοκού.

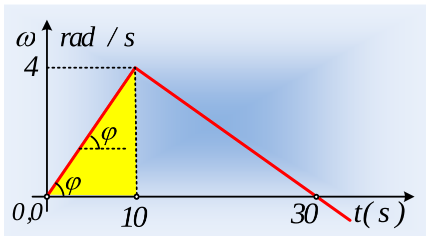
iii) Να βρεθεί η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Κ της δοκού της χρονικές στιγμές:

α) $t_0=0$ και β) $t_2=5s$.

iv) Ποιας δύναμης μειώσαμε το μέτρο μετά το 10^o δευτερόλεπτο; Αφού δικαιολογήσετε την απάντησή σας, στη συνέχεια να υπολογίστε το νέο μέτρο της δύναμης αυτής.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της Κ, $I_{cm}=\frac{1}{12}m\ell^2$.

Απάντηση:



i) Στο διάγραμμα ω-t, η κλίση είναι αριθμητικά ίση με την επιτάχυνση του στερεού αφού:

$$a_{1\gamma\omega\nu}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\omega-0}{t-0}=\frac{\omega}{t}$$

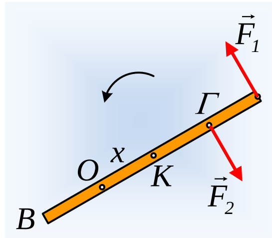
$$a_{1\gamma\omega\nu}=\frac{\omega}{t}=\frac{4}{10}rad/s^2=0{,}4rad/s^2.$$

Ενώ το αντίστοιχο εμβαδόν, το εμβαδόν του τριγώνου με κίτρινο χρώμα, είναι αριθμητικά ίσο με την γωνία στροφής της δοκού:

$$\Delta\vartheta=\frac{1}{2}\beta\upsilon=\frac{1}{2}10\cdot 4rad=20rad$$

ii) Το σύστημα των δύο δυνάμεων F_1-F_2, αποτελεί ένα ζεύγος δυνάμεων με ροπή τ=F·d, εξαιτίας της οποίας η δοκός αποκτά κατακόρυφη γωνιακή επιτάχυνση, πάνω στον άξονα με φορά προς τον αναγνώστη, με αποτέλεσμα η δοκός να στρέφεται αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_o = I_o \cdot a_{1\gamma\omega\nu} \rightarrow I_o = \frac{\Sigma\tau_o}{a_{1\gamma\omega\nu}} = \frac{F_1 d}{a_{1\gamma\omega\nu}} = \frac{28\cdot 1}{0{,}4} kg\cdot m^2 = 70 kg\cdot m^2 .$$



Έστω ότι ο άξονας στο O απέχει κατά x από το μέσον (κέντρο μάζας) K της δοκού. Από το θεώρημα του Steiner έχουμε:

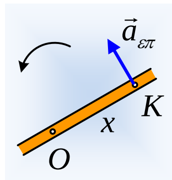
$$I_o = I_{cm} + mx^2 \rightarrow x^2 = \frac{I_o}{m} - \frac{{}^1\!/_{12}\, m\ell^2}{m} = \frac{I_o}{m} - \frac{1}{12}\ell^2 \rightarrow$$

$$x^2 = \frac{70}{30} m^2 - \frac{1}{12} 4^2 m^2 = 1m^2 \rightarrow x = 1m$$

Οπότε (BO)=$(BK)-(OK) = 2m - 1m = 1m$

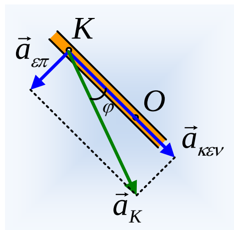
iii) Το κέντρο μάζας K της δοκού εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από το O.

α) Τη στιγμή $t_0=0$ το σημείο K δεν έχει ταχύτητα, απλά ξεκινά την κίνησή του. Η επιτάχυνση που αποκτά, είναι κάθετη στην ακτίνα περιστροφής του (OK) και ευθύνεται για την αλλαγή στο μέτρο της ταχύτητας του K. Ονομάζεται **επιτρόχιος** επιτάχυνση και έχει μέτρο ίσο με το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητάς του:



$$a_{\varepsilon\pi} = \frac{d|\upsilon_K|}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = a_{\gamma\omega\nu}\cdot r = 0{,}4\cdot 1m/s^2 = 0{,}4m/s^2 .$$

β) Τη στιγμή t_2, το σημείο K, εκτός της παραπάνω επιτάχυνσης (η οποία έχει σταθερό μέτρο, αφού έχουμε σταθερή γωνιακή επιτάχυνση) έχει αποκτήσει και γωνιακή ταχύτητα μέτρου:



$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t_2 = 0{,}4\cdot 5 rad/s = 2\ rad/s$

οπότε έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση με κατεύθυνση προς το κέντρο περιστροφής O, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$a_{\kappa\varepsilon\nu} = \omega^2 r = \omega^2 x = 2^2\cdot 1m/s^2 = 4m/s^2 .$$

Οπότε το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου K, έχει μέτρο:

$$\alpha_K = \sqrt{a_{\varepsilon\pi}^2 + a_{\kappa\varepsilon\nu}^2} = \sqrt{0{,}4^2 + 4^2}\, m/s^2 \approx 4{,}02m/s^2$$

Η οποία σχηματίζει με τη δοκό γωνία φ, όπου $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{a_{\varepsilon\pi}}{a_{\kappa\varepsilon\nu}} = \frac{0{,}4}{4} = 0{,}1$.

iv) Μετά τη στιγμή t=10s, παρατηρούμε ότι η γωνιακή ταχύτητα της δοκού μειώνεται, πράγμα που σημαίνει ότι η γωνιακή ταχύτητα αλλάζει κατεύθυνση, αποκτά δηλαδή φορά προς τα μέσα. Αλλά για να συμβεί αυτό, θα πρέπει η ροπή της δύναμης F_2 ως προς τον άξονα να είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ροπή της F_1. Αυτό με τη σειρά του μας λέει, ότι πρέπει να μειώσουμε το μέτρο της δύναμης F_1.

Για το χρονικό διάστημα 10s-30s έχουμε γωνιακή επιτάχυνση:

$$a_{2\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0-\omega_1}{t_3-t_1} = \frac{0-4}{30-10} rad/s^2 = -0{,}2 rad/s^2 .$$

Οπότε από το 2^o νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_o = I_o \cdot a_{2\gamma\omega\nu} \to +F_1' \cdot (OA) - F_2 \cdot (O\Gamma) = I_o \cdot a_{2\gamma\omega\nu} \to$$

$$F_1' = \frac{F_2(O\Gamma) + I_o \cdot a_{2\gamma\omega\nu}}{(OA)} = \frac{28 \cdot 2 + 70 \cdot (-0{,}2)}{3} N = 14N$$

dmargaris@gmail.com