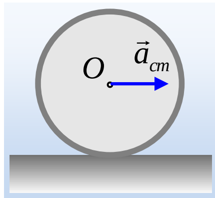
Οι επιταχύνσεις σε μια κύλιση τροχού.



Ένας τροχός με ακτίνα R=0,8m ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή $t_0=0$, τίθεται σε κίνηση, οπότε αρχίζει να κυλίεται με σταθερή επιτάχυνση κέντρου μάζας $α_{cm}$. Τη στιγμή t_1 τα σημεία Α και Β, στα άκρα μιας οριζόντιας διαμέτρου έχουν επιταχύνσεις με μέτρα $α_A=4{,}5m/s^2$ και $α_B=5{,}5m/s^2$ και αντίθετης φοράς.

i) Να σχεδιάσετε ένα σχήμα στο οποίο να εμφανίζονται τα σημεία Α και Β του τροχού και οι επιταχύνσεις τους τη στιγμή t_1, δικαιολογώντας τις θέσεις των σημείων πάνω στον τροχό.

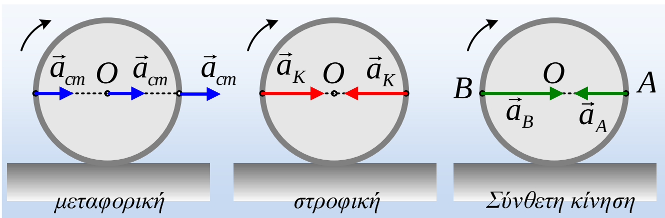
ii) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας Ο του τροχού.

iii) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1.

iv) Ποια χρονική στιγμή t_2 για πρώτη φορά μετά τη στιγμή t_1, η ακτίνα ΟΑ θα βρεθεί ξανά σε οριζόντια θέση.

Απάντηση:

i) Η κύλιση του τροχού μπορεί να μελετηθεί σαν σύνθετη κίνηση, μια μεταφορική και μια περιστροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο Ο του τροχού. Αλλά τότε κάθε σημείο του θα έχει μια επιτάχυνση $α_{cm}$, ίση με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας Ο λόγω μεταφορικής κίνησης και μια επιτάχυνση (κεντρομόλο) εξαιτίας της κυκλικής κίνησης που εκτελεί το σημείο γύρω από το Ο, όπως φαίνονται στα παρακάτω σχήματα. Να επισημανθεί ότι αφού ο τροχός κινείται προς τα δεξιά, θα στρέφεται και δεξιόστροφα (όπως οι δείκτες του ρολογιού).



Αλλά τότε, αν πάρουμε την οριζόντια διάμετρο του τροχού, η (συνολική) επιτάχυνση του αριστερού άκρου της, θα είναι ίση με το άθροισμα των δύο επιταχύνσεων, ενώ του δεξιού άκρου ίση με τη διαφορά τους. Όμως με βάση τα δεδομένα το σημείο Β έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση από το Α, επομένως οι θέσεις των δύο σημείων είναι όπως στο τελευταίο από τα παραπάνω σχήματα.

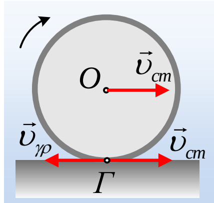
ii) Με βάση τα παραπάνω, για τα μέτρα των επιταχύνσεων ισχύει:

$$α_B=α_{cm}+α_K \quad (1) \quad \text{και} \quad α_A=α_K-α_{cm} \quad (2)$$

Με αφαίρεση των (1) και (2) παίρνουμε:

$$a_B - a_A = 2a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{a_B - a_A}{2} = \frac{5{,}5-4{,}5}{2} m/s^2 = 0{,}5 m/s^2.$$

iii) Από την σχέση (1) βρίσκουμε $\alpha_K=\alpha_B-\alpha_{cm}=5,5m/s^2-0,5m/s^2=5m/s^2$. Αλλά για την κεντρομόλο επιτάχυνση ισχύει:



$$a_K=\frac{\upsilon_{\gamma\rho}^2}{R}\rightarrow\upsilon_{\gamma\rho}=\sqrt{a_K R}=\sqrt{5\cdot 0,8}m/s=2m/s$$

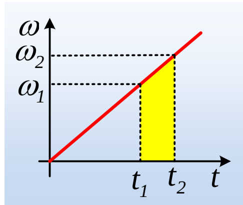
Αλλά αφού ο τροχός κυλίεται, η ταχύτητα του σημείου επαφής του τροχού με το έδαφος, σημείο Γ, έχει μηδενική ταχύτητα.

Αλλά αυτό σημαίνει ότι $\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm}=\omega R$, συνεπώς και $\upsilon_{cm}=2m/s$.

Όμως αφού η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι σταθερή, η κίνησή του είναι ευθύγραμμη ομαλή για την οποία:

$$\upsilon_{cm}=a_{cm}t\rightarrow t_1=\frac{\upsilon_{cm}}{a_{cm}}=\frac{2m/s}{0,5m/s^2}=4s$$

iv) Από την κύλιση του τροχού έχουμε ότι ισχύει και $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$, οπότε ο τροχός στρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση:



$$\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{a_{cm}}{R}=\frac{0,5}{0,8}rad/s^2=\frac{5}{8}rad/s^2.$$

Αλλά τότε η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t$ και η γραφική της παράσταση θα είναι μια ευθεία γραμμή, όπως στο διπλανό σχήμα. Έστω τη στιγμή t_2 η ακτίνα ΟΑ έχοντας διαγράψει γωνία ίση με π (rad) γίνεται ξανά οριζόντια. Αλλά τότε το εμβαδόν του κίτρινου τραπεζίου στο σχήμα, είναι αριθμητικά ίσο με τη γωνία που έχει διαγράψει η ακτίνα, δηλαδή:

$$\Delta\varphi=\frac{\omega_1+\omega_2}{t_2-t_1}\rightarrow\Delta\varphi=\frac{a_{\gamma\omega\nu}(t_2+t_1)}{t_2-t_1}\rightarrow\pi=\frac{5}{8}\frac{(t_2+4)}{t_2-4}\rightarrow$$

$$t_2=\frac{32\pi+20}{8\pi-5}s\approx 6s$$

dmargaris@gmail.com