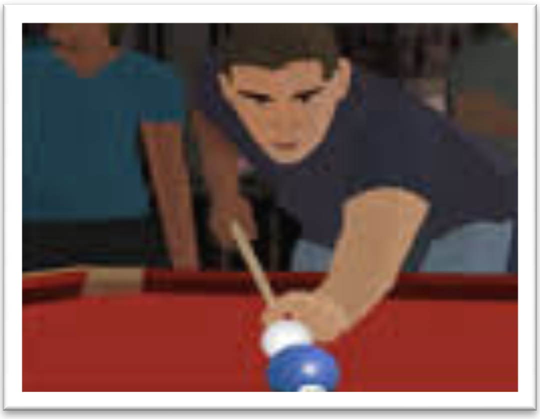
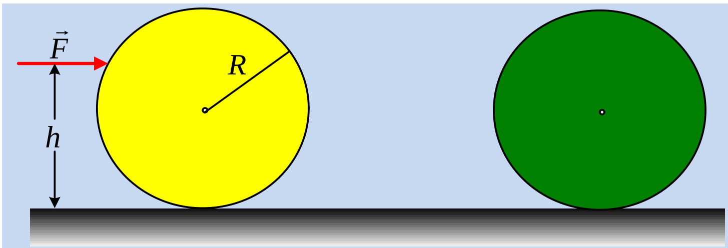
ΠΆΜΕ ΓΙΑ ΜΠΙΛΙΑΡΔΟ;





πέντε ασκήσεις για μπιλιάρδο

1. Σε ποιό ύψος h από την τσόχα πρέπει να χτυπήσουμε ακαριαία τη μπίλια με τη στέκα , ώστε αμέσως μετά να έχουμε κύλιση ; Αμελήστε την τριβή τη στιγμή της κρούσης.

Δίνεται ροπή αδράνειας συμπαγούς σφαίρας $I = \frac{2}{5}mR^2$, **R=0,04m**, **m=0,3kg.**

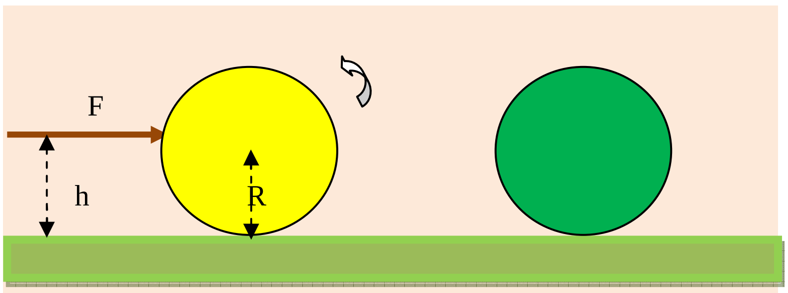
2. Η μπίλια, κυλιόμενη με ταχύτητα του κέντρου μάζας της **u_o=2m/s,** συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλη όμοιά της ακίνητη. Δεχτείτε ότι μεταξύ των σφαιρών δεν υπάρχει τριβή.

- Πόσο θα απέχουν οι μπίλιες μετά από χρόνο **t=0,57s.**
- Τι ταχύτητες θα έχουν τότε; Ποια η γωνιακή ταχύτητα κάθε μιας;

Δίνονται :συντελεστής τριβής ολίσθησης **μ=0,1** , **g=10m/s²**.

3. Αν η 1η μπίλια κυλιόμενη χτυπήσει όχι κεντρικά, αλλά ελαστικά, την ακίνητη 2η, έτσι ώστε η ταχύτητα u_o να είναι εφαπτόμενη της μέγιστης περιφέρειας της 2ης. Δεχτείτε ότι μεταξύ των σφαιρών δεν υπάρχει τριβή.

- ποιες οι ταχύτητες του κέντρου μάζας κάθε μπίλιας αμέσως μετά την κρούση τους.
- Ποια η ταχύτητα της 1ης αμέσως μετά την κρούση της;
- Περιγράψτε ποιοτικά την κίνηση της κάθε μιας μετά την κρούση.



4. Χτυπάμε τη μπίλια σε ύψος h=0,6R και στο κατακόρυφο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της, με αποτέλεσμα να πάρει ανάποδες στροφές. Αν η οριζόντια δύναμη που ασκήσαμε είναι ίση με ότι στο ερώτημα 1, να βρείτε την ταχύτητα του σημείου επαφής της με την τσόχα αμέσως μετά το χτύπημα.

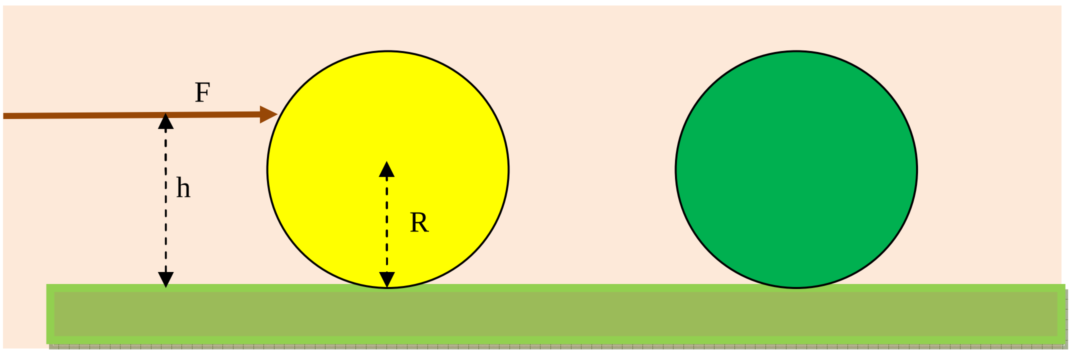
Αν η απόσταση που θα διανύσει μέχρι να συγκρουσθεί κεντρικά με την ακίνητη 2η μπίλια είναι **0,38m** (Δεχτείτε ότι μεταξύ των σφαιρών δεν υπάρχει τριβή.)

- βρείτε με τι ταχύτητα του κέντρου μάζας και τι γωνιακή ταχύτητα, θα συγκρουσθεί ;
- Με τι ταχύτητα θα επιστρέψει η 1η στο σημείο που έγινε το κτύπημα με τη στέκα και μετά από πόσο χρόνο;

5. Στην πραγματικότητα υπάρχουν τριβές και μεταξύ των σφαιρών, ας υποθέσουμε ότι είναι ο συντελεστής τριβής μ=0,05. Δεχόμαστε ότι η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι $dt=10^{-3}s$ και ότι διατηρείται η ελαστικότητα της κρούσης στη μεταφορική κίνηση, δηλαδή η $1^{η}$ μπίλια μετά την κρούση της με τη $2^{η}$,ακινητοποιείται, και η $2^{η}$ φεύγει με την ταχύτητα της $1^{ης}$. Θέλουμε να βρούμε πόση αρχική γωνιακή ταχύτητα απέκτησε η $2^{η}$ λόγω της τριβής της με την $1^{η}$, στο χρονικό διάστημα που διήρκησε η κρούση. Δεχθείτε ότι η $1^{η}$ μπίλια πριν την κρούση, είχε $\mathbf{u_o}$**=2m/s** και έκανε κύλιση, καθώς και ότι η τριβή μεταξύ τους είναι σταθερή.

Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα που απέκτησε η $2^{η}$ ***αμέσως μετά την κρούση.***

Απάντηση:



1. Ισχύουν οι γενικευμένοι νόμοι του Νεύτωνα για τη δύναμη και τη ροπή της

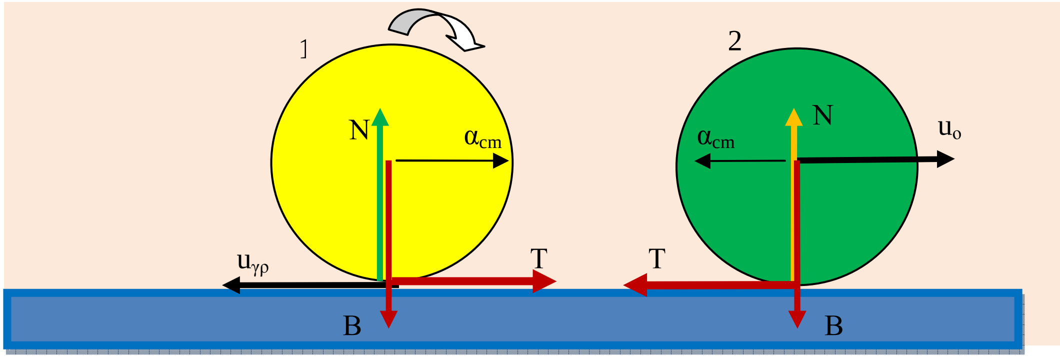
$F=\frac{dP}{dt}$ και $\tau=\frac{dL}{dt}$=F(h-R) διαιρώντας κατά μέλη έχουμε: $\frac{dL}{dP}$=h-R

$$ή \qquad \frac{Id\omega}{mdu}=h-R$$

όμως θέλουμε να έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση, άρα u=Rω ή du=Rdω έτσι η παραπάνω γίνεται: $\frac{I}{Rm}=h-R$ ή $h=\frac{\frac{2}{5}mR^2}{mR}+R$ ή **h=1,4R ή h=0,056m=5,6cm**

2. Η γωνιακή ταχύτητα της κυλιόμενης μπίλιας πριν την κρούση είναι:

$\omega=\frac{u_o}{R}=\frac{2}{0{,}04}=50r/s$. Επειδή η κρούση είναι κεντρική ελαστική, η κινούμενη σφαίρα θα ακινητοποιηθεί μεταφορικά ενώ η γωνιακή ταχύτητά της δεν επηρεάζεται, και η ακίνητη αρχίζει να κινείται με ταχύτητα u_o=2m/s, και με μηδενική αρχική γωνιακή ταχύτητα.



Το σημείο επαφής της 1ης σφαίρας, μετά την κρούση, έχει γραμμική ταχύτητα προς τα αριστερά, άρα θα έχουμε τριβή Τ ολίσθησης προς τα δεξιά, ενώ η τριβή στη δεύτερη μπίλια θα είναι αντίθετη της ταχύτητας u_o , και θα την επιβραδύνει μεταφορικά ενώ θα την επιταχύνει στροφικά. Οι μπίλιες θα κυλήσουν χωρίς ολίσθηση, όταν οι ταχύτητες θα διαμορφωθούν έτσι ώστε u=ωR .

Είναι Τ=μΝ=μmg , ΣF =ma_{cm} ή μmg=ma_{cm} ή a_{cm}=μg=1m/s^2 είναι η επιτάχυνση για την 1η , και επιβράδυνση για τη δεύτερη.

Επίσης ισχύει Στ =$I\alpha_\gamma$ ή $TR=\frac{2}{5}mR^2\cdot a_\gamma$ ή $\mu mgR=\frac{2}{5}mR^2\cdot a_\gamma$ ή

α_γ=2,5gμ/R= 2,5.10.0,1/0,04=62,5 r/s^2 είναι η γωνιακή επιβράδυνση της 1ης και η γωνιακή επιτάχυνση της 2ης .

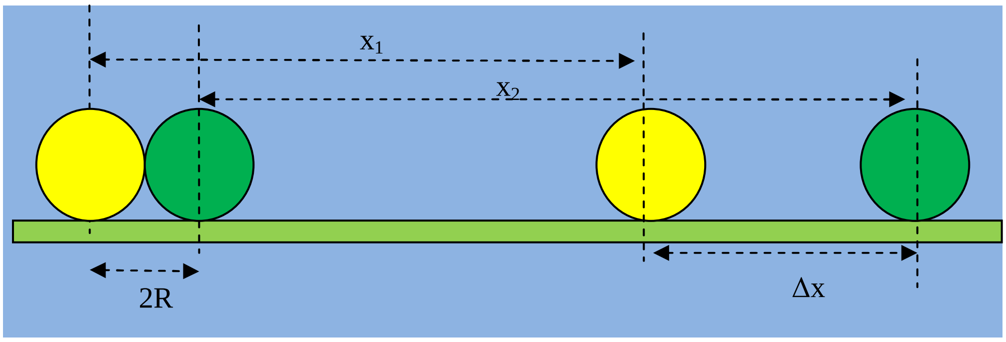
Θα έχουμε για την 1η κ.χ.ο. όταν u=Rω ή $a_{cm}t_1=(\omega_o-\alpha_\gamma t_1)R$ ή $t_1=\frac{\omega_o R}{a_{cm}+a_\gamma R}$

ή $t_1=\frac{u_o}{a_{cm}+a_\gamma R}$

Ομοίως για τη δεύτερη μπίλια u=ωR

u_o-a_{cm} t_2=$t\alpha_\gamma t_2$ R ή $t_2=\frac{u_o}{a_{cm}+a_\gamma R}=t_1$ αντικαθιστώ κι έχω $t_1=t_2=\frac{2}{1+62{,}5\cdot 0{,}04}$=0,57s

Η μετατόπιση της 1ης στο χρόνο αυτό είναι: $x_1=\frac{1}{2}a_{cm}t^2$



Η μετατόπιση της 2ης στο χρόνο αυτό είναι: $x_2=u_ot-\frac{1}{2}a_{cm}t^2$

Η απόστασή τους μετά χρόνο t είναι

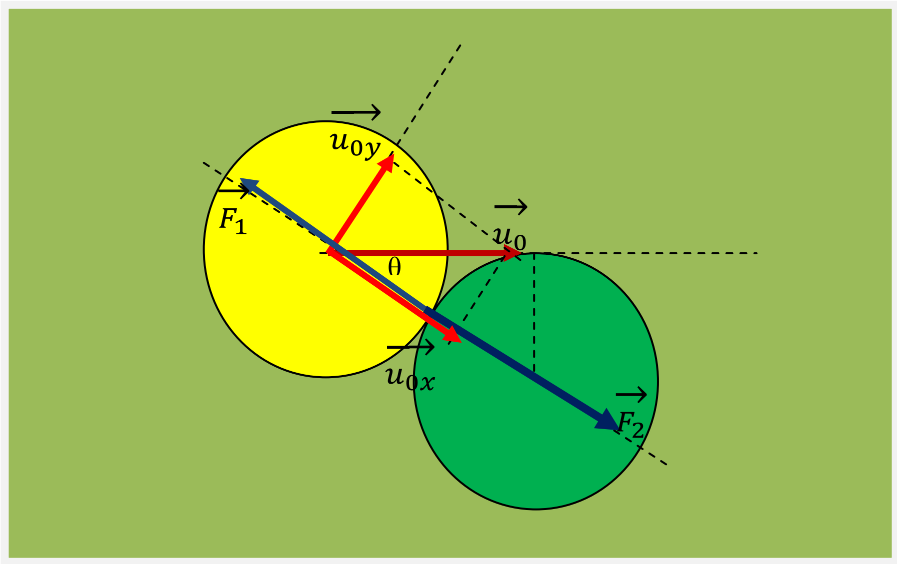
$\Delta x=2R+x_2-x_1=u_ot-\frac{1}{2}a_{cm}t^2-\frac{1}{2}a_{cm}t^2$ ή $\boldsymbol{\Delta x=2R+u_ot-a_{cm}t^2}$

αντικαθιστώντας βρίσκουμε: $\Delta x=0{,}08+2.0{,}57-1.0{,}57^2$=**0,08**+**0,815m =89,5cm**

οι ταχύτητες θα είναι: $u_1=a_{cm}t$=0,57m/s, $u_2=u_o-a_{cm}t$=2-0,57=1,43m/s

και οι γωνιακές ταχύτητες:$\omega_1=u_1/R$= 0,57/0,04=14,25 r/s , $\omega_2=u_2/R$=1,43/0,04=35,75r/s.

3. Σε μια κάτοψη της κρούσης έχουμε το παρακάτω σχήμα:



Αναλύουμε την $\mathbf{u_o}$ της 1ης σε συνιστώσες , $\mathbf{u_{ox}=u_o συνθ}$ στη διεύθυνση της διακέντρου και στην $\mathbf{u_{oy}=u_o ημθ}$ σε διεύθυνση κάθετη στη διάκεντρο.

Από το σχήμα έχουμε ημθ=R/2R=1/2 άρα θ=30^o .

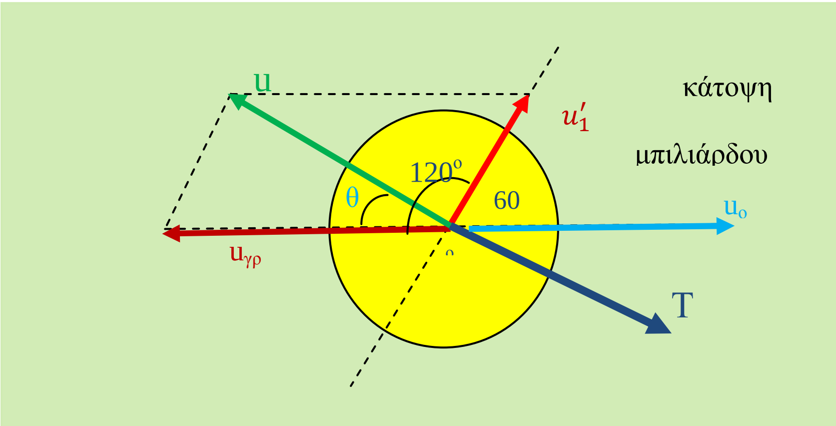
Η κρούση είναι ελαστική έκκεντρη, επομένως οι δυνάμεις μεταξύ των σφαιρών F_1, F_2 είναι στη διεύθυνση της διακέντρου τους, και δεν αναπτύσσουν ροπή ως προς το κέντρο μάζας κάθε μιας. Αυτό σημαίνει ότι η γωνιακή ταχύτητα $ω_o$ της 1ης θα παραμείνει ως έχει, καθώς και η 2η ,αμέσως μετά την κρούση δεν έχει γωνιακή ταχύτητα. Επειδή η κρούση είναι ελαστική και οι μπίλιες έχουν ίσες μάζες, μεταφορικά θα ανταλλάξουν ταχύτητες κατά τη διεύθυνση της διακέντρου, δηλαδή η 1η θα έχει ταχύτητα $\boldsymbol{u'_{ox}} = \mathbf{0}$ αμέσως μετά την κρούση, ενώ η 2η θα αποκτήσει την ταχύτητα $u_{ox}=u_o$συνθ που είχε η 1η στη διεύθυνση της διακέντρου πριν την κρούση.

Άρα $\boldsymbol{u'_1}$= $\mathbf{u_{oy}=u_o}$**ημθ=2.0,5=1m/s** , $\boldsymbol{u'_2}$= $\mathbf{u_{ox}=u_o}$**συνθ=** $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\mathbf{3}}$ **m/s .**

Οι ταχύτητες $\boldsymbol{u'_1}$, $\boldsymbol{u'_2}$ είναι κάθετες μεταξύ τους γιατί κάθε μια είναι ίση με την $\mathbf{u_{oy}}$ και $\mathbf{u_{ox}}$ που εκ κατασκευής είναι κάθετες μεταξύ τους.

Η $2^η$ θα κάνει επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση, κινούμενη ευθύγραμμα στη διεύθυνση της διακέντρου, και επιταχυνόμενη στροφικά, όπως είδαμε στη $2^η$ περίπτωση ,μέχρι τη στιγμή που θα κυλήσει χωρίς ολίσθηση.

Η $1^η$ έχει ταχύτητα μεταφορικής κίνησης στη διεύθυνση της καθέτου στη διάκεντρο, αλλά η περιστροφή της γινότανε σε κατακόρυφο επίπεδο της αρχικής κίνησης δηλ. στο κατακόρυφο επίπεδο της $\underset{u_o}{\longrightarrow}$ Το σημείο επαφής της με την τσόχα , έχει ταχύτητα που είναι συνισταμένη της μεταφορικής του κέντρου μάζας $\boldsymbol{u_1'} = \mathbf{1m/s}$ **και της γραμμικής της λόγω περιστροφής, $u_{γρ}$=ωR=u_o=2m/s, που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 120^o , καθότι η γραμμική ταχύτητα στο σημείο επαφής με την τσόχα, είναι στη διεύθυνση της u_o με αντίθετη φορά.**

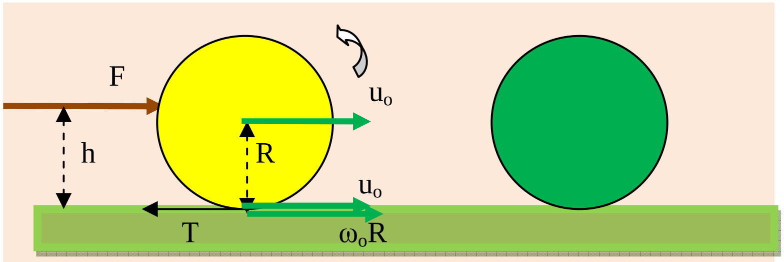


$$\mathbf{u}=\sqrt{\boldsymbol{u_{γρ}^2 + u_1'^2 + 2u_{γρ}u'_1 συν120^o}} = \sqrt{\mathbf{2^2 + 1^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-\tfrac{1}{2})}} = \sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{m/s}$$

$$\mathbf{εφθ}=\frac{\boldsymbol{u'_1 ημ120}}{\boldsymbol{u_{γρ}+u'_1 συν120}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\mathbf{2+(-0,5)}} = \frac{\sqrt{3}}{\mathbf{3}} \quad \textbf{άρα θ=30}^{\mathbf{o}}\,\textbf{.}$$

<u>Η τριβή ολίσθησης **T=μmg=0,04N** θα είναι αντίθετη της ταχύτητας **u** του σημείου επαφής, και επειδή τα μέτρα των ταχυτήτων θα αλλάζουν λόγω τριβής, θα αλλάζει και η διεύθυνση της συνισταμένης ταχύτητας **u** , με αποτέλεσμα να αλλάζει και η διεύθυνση της τριβής ολίσθησης, ως αντίθετη κάθε χρονική στιγμή της συνισταμένης ταχύτηταςu ,και η</u>

κίνηση είναι πολύπλοκη, δεν θα ισχύει η ‘’αρχή της επαλληλίας’’ γιατί οι κινήσεις δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους , και το κέντρο μάζας της μπίλιας θα κάνει καμπυλόγραμμη κίνηση, ενώ θα κυλάει με ολίσθηση.

4. 

Ισχύουν οι γενικευμένοι νόμοι του Νεύτωνα για τη δύναμη και τη ροπή της

$F = \frac{dP}{dt}$ και $\tau = \frac{dL}{dt}$ =-F(R-h) διαιρώντας κατά μέλη έχουμε: $\frac{dL}{dP}$=-R+h

ή $\frac{Id\omega}{mdu} = -h + R$

όμως σύμφωνα με την εκφώνηση, ασκήθηκε η ίδια δύναμη και σε ίση απόσταση από το κέντρο της μπίλιας, άρα θα της προσδώσει την ίδια ταχύτητα στο κέντρο μάζας u_o και τη ίδια γωνιακή ταχύτητα κατά μέτρο αλλά αντίθετης φοράς, άρα $u_o=-R\omega_o$, επομένως η ταχύτητα του σημείου επαφής θα είναι: $u=u_o+R\omega=2u_o=4m/s$.

Η επιβράδυνση του c.m. είναι ίδια με πριν ,δηλ. $a_{cm}=1m/s^2$ και ίδια γωνιακή επιβράδυνση $\alpha_\gamma=62{,}5\ r/s^2$, κι αυτό ,γιατί η τριβή ολίσθησης παραμένει ίδια, ανεξάρτητη της ταχύτητας του σημείου επαφής με την τσόχα.

άρα $u_{cm} = u_o - a_{cm}t$, $x = u_o t - \frac{1}{2}a_{cm}t^2$

ή $\frac{1}{2}a_{cm}t^2 - u_o t + x = 0$ ή $t = \frac{u_o \pm \sqrt{{u_o}^2 - 2ax}}{a} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 2.0{,}38}}{1} = \frac{2 \pm 1{,}8}{1}$

Η ρίζα t=3,8s απορρίπτεται γιατί είναι μεγαλύτερη του ολικού χρόνου για να σταματήσει, δηλ. $t_{ολ}=u_o/a_{cm}=2s$,άρα t=0,2s,οπότε $u_{cm}=2-1.0{,}2=1{,}8m/s$ και

$\omega=\omega_o-\alpha_\gamma t= 50-62,5.0,2=37,5$ r/s.

Μετά την κρούση η $1^η$ μπίλια ακινητοποιείται μεταφορικά αλλά περιστρέφεται με την ίδια ,πριν την κρούση, γωνιακή ταχύτητα ω=37,5 r/s, ενώ η $2^η$ αρχίζει να κινείται με ταχύτητα του c.m. u_2=1,8m/s κάνοντας επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση, ενώ στροφικά επιταχύνεται , κι αυτό μέχρι να έχουμε κύλιση δηλ. $u_2'=\omega' R$.

Η $1^η$ θα επιστρέψει γιατί έχει ανάποδες στροφές και η τριβή ολίσθησης θα είναι προς τα αριστερά, που θα την επιταχύνει μεταφορικά και θα την επιβραδύνει στροφικά, μέχρι να έχουμε κύλιση , δηλ. $u_1=\omega_1 R$, $a_{cm}t_1=(\omega-\alpha_\gamma t_1)R$, $t_1=\frac{\omega R}{a_{cm}+a_\gamma R}=0{,}428s$

Σ' αυτό το χρόνο θα μετατοπισθεί προς τα πίσω κατά:

$x_1=\frac{1}{2}a_{cm}t^2=0{,}5.\,0{,}428^2=0{,}09m<0{,}38m$ άρα θα έχουμε κύλιση, κι επομένως θα επιστρέψει με ταχύτητα $u_1'=a_{cm}t$=0,428m/s, διανύοντας διάστημα Δs_3=0,38-0,09=0,28m, σε χρόνο $\Delta t_3=\Delta s_3/u_1'$=0,28/0,428=0,654s

άρα το συνολικό χρονικό διάστημα είναι :Δt=0,2+0,428+0,654s =1,282s , μετά το χτύπημα.

5. Η μέση δύναμη F που αναπτύσσεται μεταξύ των σφαιρών στη διάρκεια της κρούσης, είναι για τη $2^η$ μπίλια:

$F=\frac{dp}{dt}=\frac{mu_o}{dt}=\frac{0{,}3\cdot 2}{10^{-3}}=600N$

Η τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ τους, εξαιτίας της περιστροφής της $1^{ης}$, είναι

T=μF=0,05.600=30N. Η τριβή ολίσθησης με το δάπεδο είναι

$T_{ολ.}=\mu_{ολ.}mg$=0,1.0,3.10=0,3N<<30N

$\Sigma\tau=\frac{dL}{dt}$, $TR=\frac{\frac{2}{5}mR^2\omega}{dt}$, $\omega=\frac{5Tdt}{2mR}$ $\omega=\frac{5.30.0{,}001}{2.0{,}3.0{,}04}=6{,}25r/s$!!!!

Ουκ ευκαταφρόνητη ….

Κορκίζογλου Πρόδρομος prodkork@hotmail.com

7ο Γ.Ε.Λ. Νέας Σμύρνης