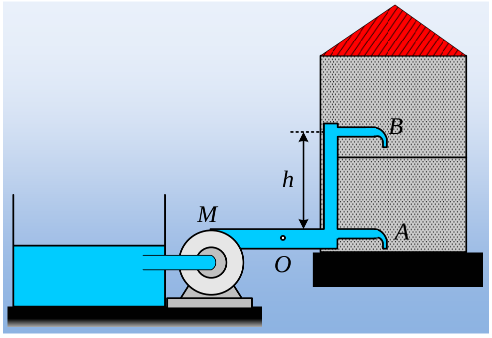
Ας μειώσουμε το συντελεστή δόμησης!!!.



Ας συνεχίσουμε στη γραμμή της ανάρτηση; «**Τρεις ανοικτές βρύσες και η αντλία.**» αλλά μειώνοντας …τους ορόφους, για λιγότερες πράξεις.

Μια διώροφη!!! λοιπόν κατοικία τροφοδοτείται με νερό από μια δεξαμενή, στην επιφάνεια του εδάφους, με την βοήθεια μιας αντλίας (Μ), όπως στο σχήμα. Ο κεντρικός σωλήνας τροφοδοσίας έχει διατομή A_1=14,5cm^2, ενώ με πλήρως ανοικτές τις βρύσες, το νερό εξέρχεται σχηματίζοντας φλέβες με διατομές Α=0,3cm^2. Η βρύση στο ισόγειο, βρίσκεται στο ίδιο ύψος με την αντλία, ενώ η βρύση στον πρώτο όροφο βρίσκεται ψηλότερα κατά h=4m. Η αντλία λειτουργεί αυτόματα, εξασφαλίζοντας στην έξοδό της, σταθερή πίεση p_o. Ανοίγουμε ταυτόχρονα και πλήρως τις δυο βρύσες, οπότε η παροχή της βρύσης του ισογείου είναι 0,45L/s. Θεωρώντας μηδενικό το συντελεστή ιξώδους, ενώ δεν υπάρχουν τριβές του νερού με τα τοιχώματα και τις ροές μόνιμες και στρωτές:

i) Να βρεθεί η παροχή της βρύσης του πρώτου ορόφου.

ii) Ποια η ισχύς τη αντλίας;

iii) Βέβαια στην πραγματικότητα, η παραπάνω ροή δεν είναι στρωτή αλλά τυρβώδης, αφού το νερό δεν έχει μηδενικό συντελεστή ιξώδους. Έτσι λειτουργώντας η αντλία με τον ίδιο τρόπο εξασφαλίζει στο σημείο Ο την ίδια σταθερή πίεση p_o, ενώ οι παροχές είναι Π_A=0,42L/s, Π_B=0,30L/s . Να βρεθεί η ισχύς που μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της εσωτερικής τριβής που εμφανίζεται.

Δίνεται η πυκνότητα του νερού ρ=1.000kg/m^3 και g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Έστω υ_1 και υ_2 οι ταχύτητες εκροής στις δυο βρύσες και υ η ταχύτητα του νερού στην έξοδο της αντλίας, σημείο Ο. Για την βρύση Α:

$$\Pi_1 = A\cdot\upsilon_1 \rightarrow \upsilon_1 = \frac{0,45\cdot 10^{-3}\,m^3/s}{0,3\cdot 10^{-4}\,m^2} = 15\,m/s$$

Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου Ο και του σημείου εξόδου της βρύσης Α στο ισόγειο:

$$p_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \quad (1)$$

Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου Ο και του σημείου εξόδου της βρύσης Β:

$$p_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h \quad (2)$$

Από (1) και (2) λαμβάνοντας υπόψη ότι $p_B = p_A = p_{ατμ}$, έχουμε:

$$p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho gh = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 - 2gh} = \sqrt{15^2 - 2\cdot 10\cdot 4}\,m/s \approx 12\,m/s$$

Αλλά τότε η παροχή της βρύσης του α΄ ορόφου είναι:

$$\Pi_2 = A\cdot\upsilon_2 = 0{,}3\cdot 10^{-4}\cdot 12m^3/s = 0{,}36L/s.$$

ii) Υπεύθυνη για την αύξηση της μηχανικής ενέργειας του νερού, κατά την μεταφορά του από την δεξαμενή, στις βρύσες, είναι η αντλία. Αλλά ο ρυθμός αύξησης της μηχανικής ενέργειας του νερού κατά την παραπάνω μεταφορά είναι:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta m\cdot gh}{\Delta t} + \frac{\frac{1}{2}\Delta m\cdot\upsilon^2}{\Delta t} = \frac{\rho\Delta V\cdot gh}{\Delta t} + \frac{\frac{1}{2}\rho\Delta V\cdot\upsilon^2}{\Delta t} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Pi\left(\rho gh + \frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2\right) \rightarrow$$

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta t} = \Pi_1\left(\rho gh + \frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2\right) = 0{,}45\cdot 10^{-3}\left(\frac{1}{2}1.000\cdot 15^2\right)J/s \approx 50{,}6\,J/s$$

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta t} = \Pi_2\left(\rho gh + \frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2\right) = 0{,}36\cdot 10^{-3}\left(10.000\cdot 4 + \frac{1}{2}1.000\cdot 12^2\right)J/s \approx 40{,}4\,J/s$$

$$\frac{\Delta E_{o\lambda}}{\Delta t} = (50{,}6 + 40{,}4)J/s \approx 91\,J/s = P_{\alpha\nu\tau\lambda\iota\alpha\varsigma}$$

Εναλλακτικά:

Η ισχύς της αντλίας, είναι ο ρυθμός με τον οποίο παράγει έργο πάνω στη στήλη του νερού. Αλλά τότε:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{(p_o - p_{\alpha\tau})\Delta V}{\Delta t} = (p_o - p_{\alpha\tau})\cdot\Pi$$

Όπου η συνολική παροχή είναι $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = (0{,}45+0{,}36)L/s = 0{,}81L/s$, ενώ από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ της διατομής στο Ο και των διατομών των φλεβών στις βρύσες παίρνουμε:

$$A_1\upsilon_o = A\upsilon_1 + A\upsilon_2 \rightarrow$$

$$\upsilon_o = \frac{A}{A_1}(\upsilon_1 + \upsilon_2) = \frac{0{,}3cm^2}{14{,}5cm^2}(15 + 12)m/s \approx 0{,}56\,m/s$$

Εξάλλου από την σχέση (1) παίρνουμε $p_o - p_{\alpha\tau} = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_o^2$ (4)

$$P_{\alpha\nu\tau} = (p_o - p_{\alpha\tau})\cdot\Pi = \left(\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_o^2\right)\cdot\Pi \rightarrow$$

$$P_{αντ} = \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_1^2 - \upsilon_o^2\right)\cdot \Pi = \frac{1}{2}\cdot 1000\left(15^2 - 0{,}56^2\right)\cdot 0{,}81\cdot 10^{-3}W \approx 91W$$

iii) Το νερό που εξέρχεται στη μονάδα του χρόνου, από την Α βρύση, αφού η ροή είναι τυρβώδης, δεν είναι σταθερή. Μπορούμε όμως να βρούμε την μέση ταχύτητα εκροής:

$$\upsilon_1' = \frac{\Pi_1'}{A} = \frac{0{,}42\cdot 10^{-3}m^3/s}{0{,}3\cdot 10^{-4}m^2} = 14\ m/s$$

Αποτέλεσμα της μεταφοράς είναι να αυξάνεται η μηχανική ενέργεια του νερού και ο ρυθμός αύξησης θα είναι:

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Pi_1\left(\rho gh + \frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1'^2\right) = 0{,}42\cdot 10^{-3}\left(\frac{1}{2}1.000\cdot 14^2\right)J/s \approx 41{,}2\ J/s$$

Με την ίδια λογική, από την βρύση Β:

$$\upsilon_2' = \frac{\Pi_2'}{A} = \frac{0{,}3\cdot 10^{-3}m^3/s}{0{,}3\cdot 10^{-4}m^2} = 10\ m/s$$

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta t} = \Pi_2\left(\rho gh + \frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_2^2\right) = 0{,}3\cdot 10^{-3}\left(1.000\cdot 10\cdot 4 + \frac{1}{2}1.000\cdot 10^2\right)J/s = 27\ J/s$$

Συνεπώς η συνολική αύξηση της μηχανικής ενέργειας της ποσότητας του νερού που εξέρχεται από τις τρεις βρύσες, στη μονάδα του χρόνου, είναι ίση με $(41{,}2 + 27)J/s = 68{,}2J/s$ ενώ η αντίστοιχη ενέργεια που πήρε από την αντλία είναι:

$$P'_{αντ} = (p_o - p_{ατ})\cdot\Pi' \rightarrow$$

Όμως από την σχέση (4), με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$p_o - p_{ατ} = \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_1^2 - \upsilon_o^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 1000\left(15^2 - 0{,}56^2\right)N/m^2 = 112.343\ N/m^2.$$

Ας προσεχθεί ότι η πίεση που δημιουργεί η αντλία είναι ίδια, είτε το νερό θεωρηθεί ιδανικό ρευστό, είτε όχι, οπότε και η διαφορά $p_o - p_{ατ}$ είναι η ίδια.

Εξάλλου η συνολική παροχή είναι ίση με $\Pi' = \Pi_1' + \Pi_2' = (0{,}42+0{,}30)L/s = 0{,}72L/s$, οπότε:

$$P'_{αντ} = (p_o - p_{ατ})\cdot\Pi' = 112.343\cdot 0{,}72\cdot 10^{-3}W = 80{,}9W$$

Αλλά τότε με βάση της διατήρηση της ενέργειας, η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου, η οποία μετατρέπεται σε θερμική (αυξάνοντας την εσωτερική ενέργεια του νερού και των σωλήνων), εξαιτίας των τριβών είναι:

$$P_Q = (80{,}9J - 68{,}2)J/s = 12{,}7\ J/s$$

dmargaris@gmail.com