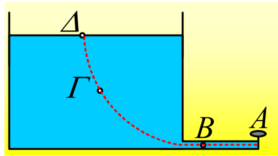
Με ανοικτή και κλειστή την στρόφιγγα.



Μια μεγάλη δεξαμενή είναι γεμάτη νερό μέχρι ύψους h=5m, ενώ ένα σωλήνας, που συνδέεται στον πυθμένα, έχει διατομή $A=1cm^2$ και κλείνεται με στρόφιγγα στο άκρο Α, όπως στο σχήμα. Το νερό με πυκνότητα $\rho=1.000kg/m^3$, θεωρείται ιδανικό ρευστό και η ροή στρωτή και μόνιμη με τη στρόφιγγα ανοικτή, ενώ στο σχήμα έχει χαραχθεί μια ρευματική γραμμή ΔΓΑ. Δίνεται επίσης $g=10m/s^2$.

i) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος, με την στρόφιγγα ανοικτή:

α) Η πίεση στο σημείο Δ της επιφάνειας είναι ίση με την πίεση στο Α.

β) Μια μικρή μάζα νερού, έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια, την στιγμή που βγαίνει από το άκρο Α, παρά όταν βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια στο Δ.

γ) Η πίεση στο σημείο Β είναι ίση με την πίεση στο Α.

δ) Για τις τιμές της πίεσης στα σημεία Β και Γ ισχύει $p_B-p_Γ=\rho g h_{ΓΒ}$.

ii) Αν η διατομή της δεξαμενής είναι πολύ μεγάλη, ποια η ταχύτητα με την οποία βγαίνει το νερό από το άκρο Α;

iii) Κλείνουμε την στρόφιγγα. Η πίεση στο σημείο Α άλλαξε ή όχι;

v) Αν πιέσουμε με την βοήθεια ενός εμβόλου την πάνω επιφάνεια της δεξαμενής, θα αυξηθεί η ποσότητα του νερού που θα βγαίνει από την διατομή στο Α, με τη στρόφιγγα ανοικτή. Μπορείτε να εξηγείστε γιατί συμβαίνει αυτό;

Απάντηση:

i) α) Η πίεση σε ένα σημείο Δ της επιφάνειας είναι ίση με την πίεση στο Α.

Η πρόταση είναι σωστή. $p_A=p_Δ=p_{ατμοσφαιρική}$.

β) Μια μικρή μάζα νερού, έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια, την στιγμή που βγαίνει από το άκρο Α, παρά όταν βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια στο Δ.

Η πρόταση είναι σωστή. Πρακτικά η ταχύτητα στο σημείο Δ θεωρείται μηδενική. Πράγματι από την εξίσωση της συνέχειας $A_Δ\cdot υ_Δ=A_A\cdot υ_A$. Αλλά αφού $A_Δ>>A_A$ θα ισχύει ότι $υ_A>>υ_Δ$.

γ) Η πίεση στο σημείο Β είναι ίση με την πίεση στο Α.

Η πρόταση είναι σωστή. Αφού ο οριζόντιος σωλήνας έχει σταθερή διατομή, η ταχύτητα στο σημείο Β είναι ίδια με την ταχύτητα στο άκρο Α. Αλλά τότε από το νόμο Bernoulli, έχουμε:

$$p_A+\frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2=p_B+\frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2.\rightarrow$$

$$p_A=p_B.$$

δ) Για τις τιμές της πίεσης στα σημεία Β και Γ ισχύει $p_B-p_Γ=\rho g h_{ΓΒ}$.

Η πρόταση είναι λανθασμένη. Η παραπάνω σχέση θα ήταν σωστή αν δεν είχαμε κίνηση του υγρού, αλλά ισορροπία. Στην περίπτωση της μόνιμης ροής ισχύει ο νόμος Bernoulli, όπου:

$$p_Γ + \frac{1}{2}ρυ_Γ^2 + ρgh_{ΓΒ} = p_Β + \frac{1}{2}ρυ_Β^2.$$

ii) Εφαρμόζοντας το νόμο Bernoulli, μεταξύ των σημείων Δ και Α, όπου $p_Δ=p_Α=p_{ατ}$ και θεωρώντας $υ_Δ=0$, αφού η διατομή της δεξαμενής είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του σωλήνα στο Α, παίρνουμε:

$$p_Δ + \frac{1}{2}ρυ_Δ^2 + ρgh = p_Α + \frac{1}{2}ρυ_Α^2.$$

$$\frac{1}{2}ρυ_Α^2 = ρgh \rightarrow$$

$$υ_Α = \sqrt{2gh} \ \ (\textbf{θεώρημα Torricelli})$$

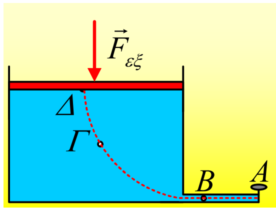
$$υ_Α = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5}m/s = 10m/s$$

iii) Μόλις κλείσουμε τη στρόφιγγα, έχουμε πια το νερό σε ισορροπία. Αλλά τότε για τις πιέσεις στα σημεία Δ και Α θα έχουμε:

$$p_Α - p_Δ = ρgh \rightarrow p_Α = p_Δ + ρgh \text{ ή}$$

$$p_Α = 10^5 N/m^2 + 1.000 \cdot 10 \cdot 5 N/m^2 = 1,5 \cdot 10^5 N/m^2.$$

iv) Αν η δεξαμενή καλυπτόταν από ένα αβαρές* έμβολο, στο οποίο ασκούσαμε μια εξωτερική δύναμη, τότε θα είχαμε αύξηση της πίεσης στο κάτω άκρο του εμβόλου, κατά $\frac{F_{εξ}}{A}$. Έτσι στο σημείο Δ η πίεση θα αποκτούσε τιμή:



$$p_Δ = p_{ατ} + \frac{F_{εξ}}{A}$$

Εφαρμόζοντας ξανά το νόμο Bernoulli, μεταξύ των σημείων Δ και Α, όπως και παραπάνω έχουμε:

$$p_Δ + \frac{1}{2}ρυ_Δ^2 + ρgh = p_Α + \frac{1}{2}ρυ_Α'^2$$

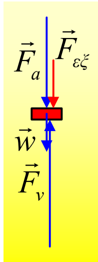
$$p_{ατ} + \frac{F_{εξ}}{A} + 0 + ρgh = p_{ατ} + \frac{1}{2}ρυ_Α'^2 \rightarrow$$

$$υ'_Α = \sqrt{2gh + \frac{2F_{εξ}}{ρA}}$$

Βλέπουμε ότι με την άσκηση της εξωτερικής δύναμης στην πάνω επιφάνεια, αυξάνεται η ταχύτητα εκροής του νερού, αφού $\sqrt{2gh + \frac{2F_{εξ}}{ρA}} > \sqrt{2gh}$, αλλά τότε η παροχή θα αυξηθεί, αφού:

$$\Pi = A_A \cdot \upsilon_A.$$

Σημείωση*



Αν το έμβολο δεν είναι αβαρές, αλλά είχε βάρος w, τότε ασκώντας την εξωτερική κατακόρυφη δύναμη $F_{\varepsilon\xi}$ η πίεση αυξάνεται κατά $\frac{w+F_{\varepsilon\xi}}{A}$. Πράγματι οι δυνάμεις που ασκούνται στο έμβολο, , έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα.

Το έμβολο ισορροπεί, οπότε:

$$\Sigma F = 0 \longrightarrow \; F_v = F_\alpha + w + F_{\varepsilon\xi} \longrightarrow$$

$$p_\Delta \cdot A = p_{\alpha\tau} \cdot A + w + F_{\varepsilon\xi} \longrightarrow$$

$$p_\Delta = p_{\alpha\tau} + \frac{w+F_{\varepsilon\xi}}{A}$$

dmargaris@gmail.com