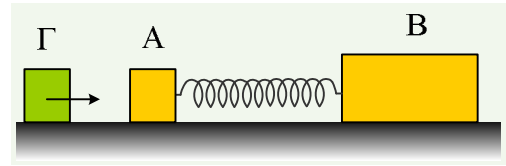


Θα μετακινηθεί το βαρύ σώμα;

Δύο σώματα Α και Β με μάζες $m_1=2\text{kg}$ και $m_2=7\text{kg}$ αντίστοιχα, ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζουν συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,4$, δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=70\text{N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του. Ένα τρίτο σώμα Γ, μάζας $m=1\text{kg}$, το οποίο επίσης παρουσιάζει με το επίπεδο τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,4$, κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου και συγκρούεται ακαριαία, κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Α, έχοντας τη στιγμή της κρούσης ταχύτητα $u=3\text{m/s}$.



- Ποιες οι ταχύτητες των τριών σωμάτων, αμέσως μετά την κρούση;
- Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας κάθε σώματος αμέσως μετά την κρούση;
- Σε μια στιγμή t_1 , το σώμα Α έχει μετατοπισθεί κατά $\Delta x=0,2\text{m}$. Για τη στιγμή αυτή να βρεθούν:
 - Η ταχύτητα το σώματος Α.
 - Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Α και ο ρυθμός αύξησης της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.
- Να εξετασθεί αν θα μετακινηθεί το σώμα Β κάποια στιγμή ή όχι.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$, ενώ δεχόμαστε ότι η οριακή στατική τριβή είναι ίση με την τριβή ολίσθησης.

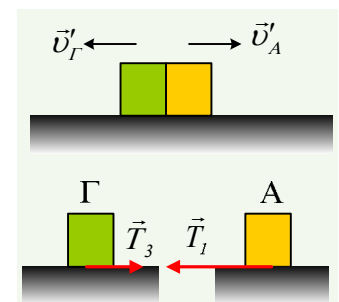
Απάντηση:

- Αν η κρούση είναι ακαριαία, δεχόμαστε ότι στη διάρκειά της η μετατόπιση του σώματος Α είναι αμελητέα, οπότε δεν άλλαξε το μήκος του ελατηρίου. Πράγμα που σημαίνει, ότι το σώμα Β δεν «συμμετέχει» καθόλου στη διαδικασία της κρούσης! Συνεπώς η ταχύτητά του μετά την κρούση θα είναι μηδενική. Για τις ταχύτητες των σωμάτων Α και Γ θα έχουμε:

$$v'_A = \frac{2m}{m+m_l}u = \frac{2 \cdot 1}{1+2}3\text{m/s} = 2\text{m/s} \text{ και}$$

$$v'_\Gamma = \frac{m-m_l}{m+m_l}u = \frac{1-2}{1+2}3\text{m/s} = -1\text{m/s}$$

- Στο σχήμα φαίνονται οι ταχύτητες και οι δυνάμεις τριβής που ασκούνται στα σώματα Α και Γ μετά την κρούση (το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του και δεν ασκεί δύναμη στο Α σώμα, ενώ στο σχήμα δεν έχουν σχεδιαστεί βάρη και κάθετες αντιδράσεις από το επίπεδο, αφού δεν επηρεάζουν τις κινήσεις των δύο σωμάτων). Έτσι για τους ζητούμενους ρυθμούς, θα έχουμε:



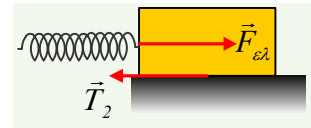
$$\frac{dK_l}{dt} = \frac{dW_{o\lambda,l}}{dt} = P_{T_l} = |T_l| \cdot |v_l| \cdot \cos 180^\circ \rightarrow$$

$$\frac{dK_l}{dt} = -\mu m_l g \cdot |v'_A| = -0,4 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2 J/s = -16 J/s$$

$$\frac{dK_3}{dt} = \frac{dW_{o\lambda,3}}{dt} = P_{T_3} = |T_3| \cdot |v_3| \cdot \cos 180^\circ \rightarrow$$

$$\frac{dK_3}{dt} = -\mu m g \cdot |v'_r| = -0,4 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1 J/s = -4 J/s$$

iii) Το ερώτημα που πρέπει αρχικά να εξετασθεί είναι αν μέχρι τη στιγμή t_1 , μετακινήθηκε ή όχι το σώμα Β. Στο διάστημα αυτό δέχεται δύο οριζόντιες δυνάμεις όπως στο διπλανό σχήμα. Η δύναμη του ελατηρίου, μεταβλητή δύναμη με μέγιστο μέτρο:



$$F_{el} = kx = 70 \cdot 0,2 N = 14 N$$

Και η τριβή, η οποία δεν γνωρίζουμε αν είναι τριβή ολίσθησης ή στατική τριβή. Υπολογίζουμε την τριβή ολίσθησης, ίση με την οριακή στατική τριβή:

$$T_{2,op} = \mu N_2 = \mu m_2 g = 0,4 \cdot 7 \cdot 10 N = 28 N$$

Αλλά αν μπορεί να παρουσιαστεί μέγιστη στατική τριβή 28N, προφανώς η δύναμη του ελατηρίου, με μέτρο 14N, δεν θα μπορέσει να κινήσει το σώμα Β, το οποίο θα ισορροπεί με εμφάνιση και δύναμης στατικής τριβής μέτρου 14N. Αλλά αν το σώμα Β μένει ακίνητο η δύναμη ελατηρίου (το έργο της οποίας συνδέεται με την δυναμική του ενέργεια) παράγει έργο μόνο πάνω στο σώμα Α.

α) Έτσι εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για το Α σώμα, αμέσως μετά την κρούση και μετά από μετατόπιση Δx , παίρνουμε:

$$K_{t_1} - K_0 = W_{w_l} + W_{N_l} + W_{T_l} + W_{F_{el}} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_l v_l^2 - \frac{1}{2} m_l v_A'^2 = 0 + 0 - \mu m_l g \cdot \Delta x + \left(0 - \frac{1}{2} kx^2 \right) \rightarrow$$

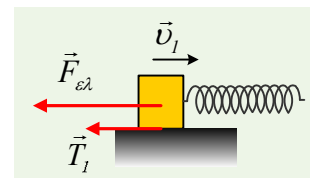
$$v_l = \sqrt{v_A'^2 - 2\mu g \cdot \Delta x - \frac{kx^2}{m_l}} = \sqrt{2^2 - 2 \cdot 0,4 \cdot 10 \cdot 0,2 - \frac{70 \cdot 0,2^2}{2}} m/s = 1 m/s$$

Όπου v_l η ταχύτητά του τη στιγμή t_1 .

β) Για τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Α έχουμε:

$$\frac{dK_l}{dt} = \frac{dW_{o\lambda,l}}{dt} = P_{SF} = -|T_l + F_{el}| \cdot |v_l| \rightarrow$$

$$\frac{dK_l}{dt} = -(\mu m_l g + kx) \cdot |v_l| = -(0,4 \cdot 2 \cdot 10 + 14) \cdot 1 J/s = -22 J/s$$



Ενώ για το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου:

$$\frac{dU_{ελ}}{dt} = -\frac{dW_{ελ}}{dt} = -P_{F_{ελ}} = +|F_{ελ}| \cdot |v_l| = 14 \cdot 1J/s = 14J/s$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η κινητική ενέργεια του σώματος μειώνεται κατά 22J/s, όπου τα 14J/s μεταφέρονται στο ελατήριο, αυξάνοντας την δυναμική του ενέργεια, ενώ τα υπόλοιπα 8J/s μετατρέπονται σε θερμική ενέργεια, θερμαίνοντας τις τριβόμενες επιφάνειες σώματος και επιπέδου, αφού:

$$P_T = -\mu m_l g \cdot |v_l| = -8J/s$$

iv) Ας υποθέσουμε ότι κάποια στιγμή t_2 το σώμα B αρχίζει να ολισθαίνει. Αυτό θα συμβεί όταν η δύναμη του ελατηρίου γίνει οριακά ίση με την οριακή στατική τριβή, που υπολογίσαμε παραπάνω ($T_{2,op}=28N$). Αλλά τότε από το νόμο του Hooke βρίσκουμε ότι το ελατήριο θα έχει συμπιεστεί κατά y , όπου:

$$F_{ελ,2} = ky \rightarrow y = \frac{F_{ελ,2}}{k} = \frac{28}{70}m = 0,4m$$

Κατά συνέπεια τη στιγμή αυτή το ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια:

$$U_2 = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}70 \cdot 0,4^2 J = 5,6J$$

Αλλά το σώμα A, απέκτησε κινητική ενέργεια, λόγω κρούσης:

$$E_{ολ} = K'_l = \frac{1}{2}m_l v_A'^2 = \frac{1}{2}2 \cdot 2^2 J = 4J$$

Είναι φανερόν ότι δεν μπορεί το σώμα A να δώσει ενέργεια 5,6J στο ελατήριο. Η υπόθεσή μας κατέληξε σε άτοπο και το σώμα B δεν πρόκειται να ολισθήσει.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να βρούμε την μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, θεωρώντας ακίνητο το σώμα B και να συγκρίνουμε τότε την δύναμη του ελατηρίου με την οριακή στατική τριβή.

Δοκιμάστε το και θα διαπιστώσετε γιατί επιλέχτηκε η παραπάνω λύση...

dmargaris@gmail.com