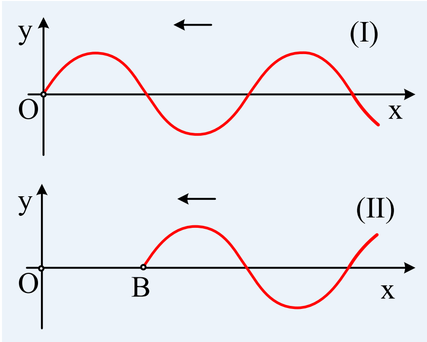
Ένα κύμα προς τα αριστερά και οι εξισώσεις του



Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και προς την αρνητική κατεύθυνση (προς τα αριστερά στο σχήμα) διαδίδεται, χωρίς απώλειες, ένα αρμονικό κύμα (Ι), με μήκος κύματος λ=2m και τη στιγμή $t_0=0$, φτάνει στο σημείο Ο στη θέση x=0, όπως στο πάνω σχήμα. Εξαιτίας του κύματος αυτού, το σημείο Ο αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση y=0,2·ημ(πt) (S.I.).

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύματος (Ι) έχει τη μορφή:

$$y_I = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$$

ii) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1=1{,}5s$ και στην περιοχή $x \leq 2m$.

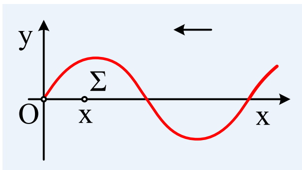
iii) Ένα πανομοιότυπο κύμα (ΙΙ), διαδίδεται επίσης κατά μήκος του ίδιου ελαστικού μέσου, όπως στο κάτω σχήμα, αλλά τη στιγμή $t_0=0$, φτάνει στη θέση Β με $x_B=1m$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύματος (ΙΙ).

β) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος αυτού, τη στιγμή $t_1=1{,}5s$ και στην περιοχή $x \leq 3m$. Πάνω στο σχήμα να σημειώσετε τις θέσεις δύο σημείων Γ και Δ, όπου τη στιγμή αυτή έχουν ταχύτητες προς την αρνητική κατεύθυνση με μέγιστο μέτρο.

γ) Να κάνετε στους ίδιους άξονες y-t, τις γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, *y=f(t)*, για τα σημεία Β, Γ και Δ.

Απάντηση:



i) Από την εξίσωση της απομάκρυνσης προκύπτει ότι ω=2π/Τ=π, οπότε Τ=2s. Το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα υ=λ·f= λ/Τ=1m/s. Έστω ένα τυχαίο σημείο Σ του μέσου, όπως στο σχήμα, στη θέση x. Το κύμα έφτασε πρώτα στο Σ και ύστερα στο Ο. Αλλά τότε ο χρόνος ταλάντωσης του Σ είναι μεγαλύτερος, από τον αντίστοιχο χρόνο για το Ο, κατά t_1= x/υ, συνεπώς η εξίσωση της απομάκρυνσής του έχει την μορφή:

$$y_\Sigma = A\cdot\eta\mu\omega\left(t+t_1\right) = A\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{\upsilon}\right) = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\upsilon T}\right)\rightarrow$$

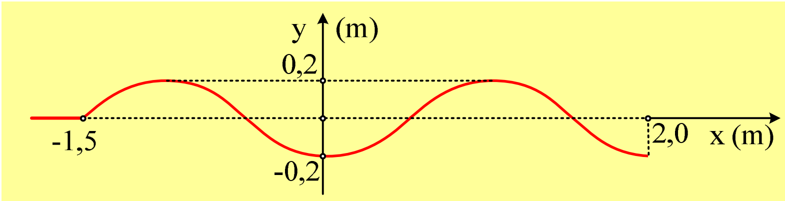
$$y_I = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right) \quad (1)$$

ii) Με αντικατάσταση στην εξίσωση (1) αριθμητικών δεδομένων, παίρνουμε:

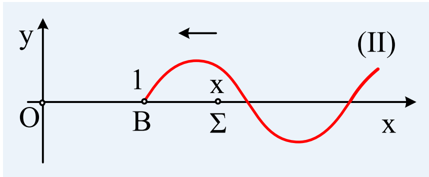
$$y_I = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right) = 0{,}2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{2}\right)\xrightarrow{t=1,5s}$$

$$y_I = 0{,}2\cdot\eta\mu\left(\pi\cdot 1{,}5+\pi x\right) = 0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi x\right) \quad (S.I.)$$

Εξάλλου τη στιγμή t_1 το κύμα έχει διαδοθεί προς τα αριστερά σε απόσταση d=υt=1,5m, φτάνοντας στην θέση x_1=-1,5m. Με βάση αυτά σχεδιάζουμε το παρακάτω στιγμιότυπο, για τη στιγμή t_1.



iii) Δουλεύουμε όπως και στο i) ερώτημα παίρνοντας ένα τυχαίο σημείο Σ, στο οποίο έχει φτάσει το κύμα, πριν φτάσει στο Β, όπως στο σχήμα. Αφού το κύμα φτάνει στο Β τη στιγμή μηδέν, το σημείο Β ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση y=0,2·ημ(πt) (S.I.).



α) Ο χρόνος ταλάντωσης του Σ είναι μεγαλύτερος, από τον αντίστοιχο χρόνο για το Β, κατά t_1= d/υ, όπου d=x-1 (m), συνεπώς η εξίσωση της απομάκρυνσης του Σ, έχει την μορφή:

$$y_\Sigma = A\cdot \eta\mu\omega\left(t+t_1\right) = A\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x-1}{\upsilon}\right) = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x-1}{\upsilon T}\right)\rightarrow$$

$$y_2 = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x-1}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = 0,2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right) \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) είναι τώρα η εξίσωση του κύματος (ΙΙ). Ας σημειωθεί ότι το σημείο Σ θα μπορούσε να ληφθεί αριστερά του Σ, οπότε το κύμα θα καθυστερούσε να φτάσει. Δοκιμάστε να το κάνετε και θα διαπιστώσετε ότι προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα…

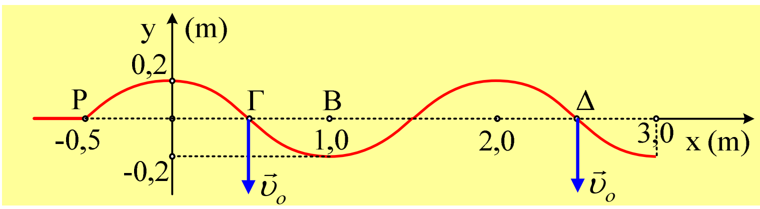
β) Με αντικατάσταση στην εξίσωση κύματος (2) t=t_1=1,5s παίρνουμε:

$$y_2 = 0,2\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right) = 0,2\cdot\eta\mu\left(\pi\cdot 1,5+\pi x-\pi\right) = 0,2\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\pi x\right)\rightarrow$$

$$y_2 = 0,2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi x\right) \quad (S.I.)$$

Ενώ το κύμα έχει διαδοθεί κατά d=υt_1=1,5m, φτάνοντας σε ένα σημείο Ρ με x=-0,5m.

Με βάση αυτά, σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο, παίρνοντας το σχήμα.

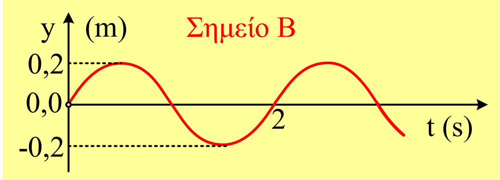


Στο σχήμα έχουν σημειωθεί τα σημεία Γ και Δ που τη στιγμή αυτή περνούν από την θέση ισορροπίας τους κινούμενα προς τα κάτω, στις θέσεις x_Γ=0,5m και x_Δ=2,5m.

γ) Η απομάκρυνση του σημείου Β, το οποίο αρχίζει την ταλάντωσή του για t=0, δίνεται από την εξίσωση:

$$y_B = 0,2 \cdot \eta\mu\omega t = 0,2 \cdot \eta\mu(\pi t) \quad (S.I.)$$

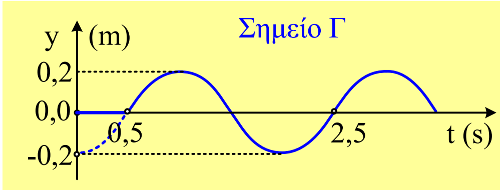
Η γραφική παράσταση της οποίας έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος.



Για το σημείο Γ, το κύμα φτάνει τη στιγμή:

$$t_\Gamma = \frac{d_{B\Gamma}}{\upsilon} = \frac{0,5}{1}s = 0,5s$$

Οπότε με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύματος x=0,5m, παίρνουμε το διπλανό διάγραμμα, αφού:

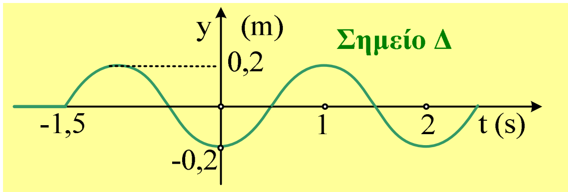


$$y_\Gamma = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \rightarrow$$

$$y_\Gamma = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{0,5}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y_\Gamma = -0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \pi t\right) = -0,2\sigma\upsilon\nu(\pi t) \quad (S.I.)$$

Στο σημείο Δ, το κύμα φτάνει πριν τη στιγμή t=0 κατά $\Delta t_\Delta = \frac{d_{\Delta B}}{\upsilon} = \frac{1,5}{1}s = 1,5s$. Άρα αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή t_Δ=-1,5s. Με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύματος x=2,5m, παίρνουμε το διπλανό διάγραμμα, αφού:

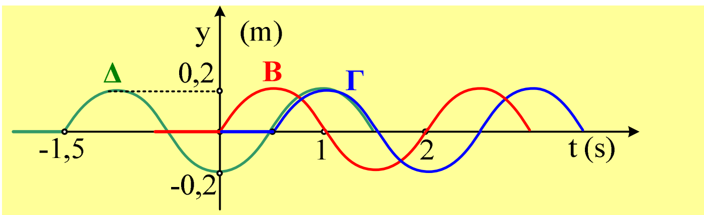


$$y_\Delta = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \rightarrow$$

$$y_\Delta = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{2,5}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\pi t - \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y_\Delta = -0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \pi t\right) = -0,2 \cdot \eta\mu(\pi t) \quad (S.I.)$$

Αν τις τρεις παραπάνω γραφικές παραστάσεις τις μεταφέρουμε σε ένα κοινό διάγραμμα θα πάρουμε:



dmargaris@gmail.com