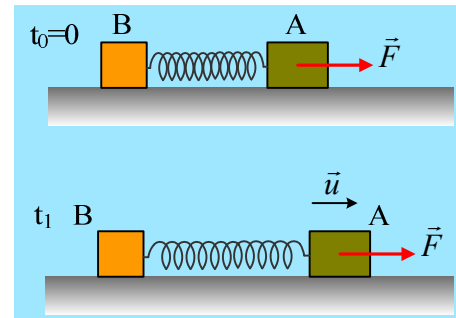


Ένα σύστημα σωμάτων κινείται

Δύο σώματα Α και Β με μάζες $m_1=2\text{kg}$ και $m_2=1\text{kg}$ αντίστοιχα, ηρεμούν σε ένα οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο εμφανίζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,5$, δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του. Σε μια στιγμή $t_0=0$, ασκούμε στο σώμα Α μια σταθερή οριζόντια δύναμη F , με μέτρο $F_1=32,5\text{N}$, όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα το σώμα να αρχίζει να κινείται προς τα δεξιά.

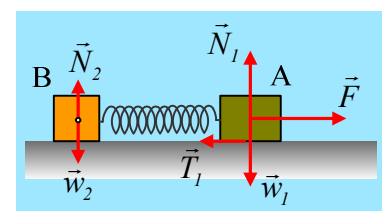


- Να υπολογισθεί ο αρχικός ($t=0^+$) ρυθμός μεταβολής της ορμής κάθε σώματος.
- Μετά από λίγο, τη στιγμή t_1 και ενώ το Α σώμα έχει μετατοπισθεί κατά $x=0,2\text{m}$, έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου $u=2\text{m/s}$, ενώ το σώμα Β μόλις αρχίζει να ολισθαίνει.
 - Να υπολογισθεί η σταθερά k του ελατηρίου.
 - Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε μέσω του έργου της δύναμης στο σύστημα, μέχρι τη στιγμή t_1 ; Με ποιες μορφές εμφανίζεται η ενέργεια αυτή; Να υπολογίσετε την ενέργεια κάθε μορφής.
- Μόλις αρχίσει η ολίσθηση του Β σώματος μειώνουμε το μέτρο της δύναμης σε $F_2=15\text{N}$, οπότε μια επόμενη στιγμή t_2 , το σώμα Α έχει ταχύτητα $v_1=0,8\text{m/s}$. Για τη στιγμή αυτή:
 - Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων (+του ιδανικού ελατηρίου).
 - Να βρεθεί η ολική ορμή το συστήματος.
 - Ποια η ταχύτητα του σώματος Β;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$, ενώ το μέτρο της οριακής στατικής τριβής είναι ίσο με το μέτρο της τριβής ολίσθησης. Υπενθυμίζεται επίσης ο νόμος του Hooke για το ελατήριο $F=k\cdot\Delta l$.

Απάντηση:

- Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο Α σώμα, μόλις ασκηθεί η δύναμη F , ενώ το ελατήριο έχει «ακόμη» το φυσικό του μήκος με αποτέλεσμα το σώμα Β να μην τείνει να κινηθεί, οπότε δεν ασκείται πάνω του δύναμη τριβής. Για το Α σώμα θα έχουμε:



$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_1 = m_1 g \rightarrow T_1 = \mu N = \mu m_1 g = 0,5 \cdot 2 \cdot 10\text{N} = 10\text{N}$$

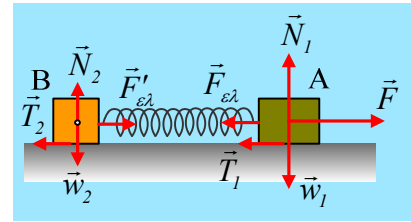
Αλλά τότε για τους ζητούμενους ρυθμούς μεταβολής θα έχουμε:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \Sigma \vec{F}_1 \rightarrow \frac{dp_1}{dt} = F - T_1 = (32,5 - 10)\text{kgm/s}^2 = 22,5\text{kgm/s}^2.$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \Sigma \vec{F}_2 = 0$$

- ii) Τη στιγμή t_1 που το σώμα B ξεκινά να κινείται (οριακά $v=0$), το ελατήριο έχει επιμήκυνση x , με αποτέλεσμα στα σώματα να ασκούνται οι δυνάμεις, όπως στο διπλανό σχήμα, για τα μέτρα των οποίων έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{yB} &= 0 \rightarrow N_2 = m_2 g \rightarrow \\ T_2 &= \mu N_2 = \mu m_2 g = 0,5 \cdot 1 \cdot 10 \text{ N} = 5 \text{ N}\end{aligned}$$



- α) Αλλά αν το B σώμα είναι έτοιμο να ξεκινήσει, η ασκούμενη τριβή είναι οριακή, ίση με την τριβή ολίσθησης $T_2=5\text{N}$, ενώ από την ισορροπία του σώματος θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{B,x} &= 0 \rightarrow F_{el} - T_2 = 0 \rightarrow F_{el} = F'_{el} = kx = T_2 \rightarrow \\ k &= \frac{T_2}{x} = \frac{5 \text{ N}}{0,2 \text{ m}} = 25 \text{ N / m}\end{aligned}$$

- β) Η ενέργεια που μεταφέρεται στο A σώμα μέσω της δύναμης F , μέχρι τη στιγμή t_1 , ίση με το έργο της δύναμης, είναι:

$$W_F = F \cdot x = 32,5 \cdot 0,2 \text{ J} = 6,5 \text{ J}$$

Ένα μέρος της ενέργειας αυτής μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια, λόγω τριβής:

$$Q_\theta = |W_T| = |-T_1 \cdot x| = T_1 \cdot x = 10 \cdot 0,2 \text{ J} = 2 \text{ J}$$

Ένα άλλο μέρος εμφανίζεται με τη μορφή της κινητικής ενέργειας:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 u^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 2^2 \text{ J} = 4 \text{ J}$$

Από τα 6,5J, έχουμε βρει τα 2J+4J=6J, μας λείπουν 0,5J. Αυτά δεν μπορεί παρά να τα έχει πάρει το ελατήριο! Πράγματι αν εφαρμόσουμε για το σώμα A το Θ.Μ.Κ.Ε. θα πάρουμε:

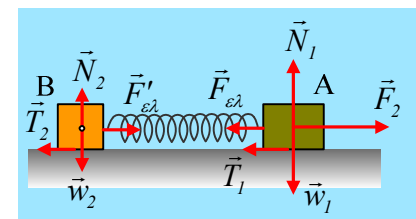
$$\begin{aligned}K_1 - K_0 &= W_{w_1} + W_{N_1} + W_{F_{el}} + W_T + W_F \xrightarrow{K_0=W_{w_1}=W_{N_1}=0} \\ W_{F_{el}} &= K_1 - W_T - W_F = 4 \text{ J} + 2 \text{ J} - 6,5 \text{ J} = -0,5 \text{ J}\end{aligned}$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το ελατήριο αφαίρεσε ενέργεια 0,5J από το σώμα A. Αυτή την ενέργεια το ελατήριο δεν την έδωσε κάπου, αφού το B σώμα παραμένει ακίνητο, άρα την έχει το ελατήριο. Αυτή την ενέργεια την ονομάζουμε **δυναμική ενέργεια το ελατηρίου**, λόγω ελαστικής παραμόρφωσης.

Δηλαδή έχουμε $U_{el} = 0,5 \text{ J}$.

- iii) Μόλις κινηθεί και το σώμα B, θα έχουμε την ίδια εικόνα, όσον αφορά τις δυνάμεις, με πριν. Αλλά τότε για το σύστημα (σώμα A+ σώμα B +ιδανικό ελατήριο) οι εξωτερικές δυνάμεις έχουν μηδενική συνισταμένη, αφού πέρα από το αυτονόητο για τις κατακόρυφες δυνάμεις, στην οριζόντια διεύθυνση θα έχουμε:

$$\Sigma F_x = F_2 - T_1 - T_2 = 15 \text{ N} - 10 \text{ N} - 5 \text{ N} = 0 \quad (1)$$



Έχουμε δηλαδή ένα μονωμένο σύστημα.

α) Σε ένα μονωμένο σύστημα η ορμή του παραμένει σταθερή, συνεπώς $\frac{d\vec{p}_{ολ}}{dt} = 0$.

Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα αναλυτικά, μελετώντας τα δύο σώμα, αφού το ιδανικό ελατήριο είναι μηδενικής μάζας και ορμής:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \Sigma \vec{F}_1 \rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{ελ} + \vec{T}_1 \rightarrow \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \Sigma \vec{F}_2 \rightarrow \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}'_{ελ} + \vec{T}_2\end{aligned}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη, θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{F}_2 + \vec{F}_{ελ} + \vec{T}_1 + \vec{F}'_{ελ} + \vec{T}_2 \rightarrow \\ \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{F}_2 + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \xrightarrow{(1)} \frac{d\vec{p}_{ολ}}{dt} = 0\end{aligned}$$

β) Αφού η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή, τότε κάθε στιγμή θα είναι ίση με την ορμή του σώματος Α τη στιγμή t_1 :

$$\vec{p}_{ολ,2} = \vec{p}_{ολ,1} \rightarrow p_{ολ,2} = m_1 u = 2 \cdot 2 \text{ kgm} / \text{s} = 4 \text{ kgm} / \text{s}$$

γ) Η παραπάνω ορμή, ίση με την ορμή των δύο σωμάτων γράφεται:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{ολ,2} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \rightarrow p_{ολ,2} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \rightarrow \\ v_2 &= \frac{p_{ολ,2} - m_1 v_1}{m_2} = \frac{4 - 2 \cdot 0,8}{1} \text{ m} / \text{s} = 2,4 \text{ m} / \text{s}\end{aligned}$$

Σχόλιο:

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, το οποίο έχει παραμόρφωση Δl , δίνεται από την εξίσωση:

$$U = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2$$

Παραπάνω δεχτήκαμε ότι η παραπάνω εξίσωση δεν είναι γνωστή, αφού θέλαμε να καταλήξουμε στην ανάγκη της εισαγωγής της, στην ενεργειακή μελέτη μας. Για το λόγο αυτό δόθηκε ως δεδομένο η ταχύτητα του σώματος Α, τη στιγμή t_1 ... πράγμα που δεν θα ήταν απαραίτητο αν γνωρίζαμε τη δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης.

dmargariw@gmail.com