

Όχι μόνο αντιστάτες...

Τα τελευταία 25 χρόνια στα ελληνικά σχολεία η διδασκαλία του ηλεκτρικού ρεύματος, περιορίζεται σε κυκλώματα που περιέχουν μόνο αντιστάτες (με μικρές εξαιρέσεις όταν διδάσκεται ο πυκνωτής και η αυτεπαγωγή, αλλά και αυτά μόνο στο συνεχές ρεύμα). Ας μην ρωτήσει κάποιος αν διδάσκονται η σύγχρονη ηλεκτρονική ή αν οι μαθητές μαθαίνουν για τις προόδους σε ολοκληρωμένα κυκλώματα και μικροηλεκτρονική...

Ας ρίξουμε λοιπόν μια γρήγορη ματιά, για να δούμε τι συμβαίνει σε ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος, το οποίο μπορεί να περιλαμβάνει και πηνίο ή πυκνωτή.

• Ένα κύκλωμα με πυκνωτή.

Στο σχήμα βλέπουμε ένα κύκλωμα που περιλαμβάνει μόνο έναν πυκνωτή με χωρητικότητα C , ενώ τροφοδοτείται από μια πηγή (AC) με τάση της μορφής $v = V_o \sin \omega t$.

Η τάση αυτή επικρατεί και μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή, συνεπώς έχουμε:

$$C = \frac{q}{v} \rightarrow q = Cv \rightarrow \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} \rightarrow$$

$$i = C (V_o \sin \omega t)' = CV_o \omega \cdot \cos \omega t \rightarrow$$

$$i = I_o \cdot \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Όπου $I_o = CV_o \omega = \frac{V_o}{1/C\omega}$ το πλάτος της έντασης του ρεύματος.

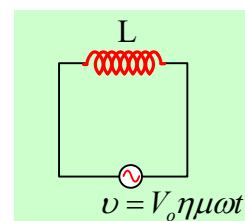
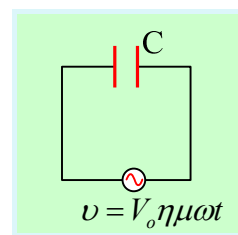
Ορίζουμε ως εμπέδηση του πυκνωτή (ή και χωρητική αντίσταση) το πηλίκο $Z_c = \frac{1}{C\omega}$, οπότε:

$$I_o = \frac{V_o}{Z_c}$$

Εξίσωση που «παραπέμπει» στο νόμο του Ohm, όπου Z_c είναι η χωρητική αντίσταση του πυκνωτή, αντίστοιχη της αντίστασης R , ενός αντιστάτη. Όσον αφορά την φάση της έντασης, αξίζει να επισημανθεί ότι η ένταση προηγείται κατά $\pi/2$ της τάσης!

• Ένα κύκλωμα με ιδανικό πηνίο.

Στο σχήμα βλέπουμε ένα ιδανικό πηνίο, στα άκρα του οποίου συνδέουμε μια πηγή AC τάσης της μορφής $v = V_o \sin \omega t$. Η τάση αυτή είναι ίση και με την ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στο πηνίο, λόγω μεταβολής της έντασης του ρεύματος που το διαρρέει. Έτσι έχουμε, από 2^ο ΚΚ:



$$v - L \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow v = L \frac{di}{dt} \rightarrow V_o \eta \mu \omega t = L \frac{di}{dt} \rightarrow$$

$$i = \int \frac{V_o}{L} \eta \mu \omega t \cdot dt = \frac{V_o}{\omega L} \int \eta \mu \omega t \cdot d(\omega t) = -\frac{V_o}{\omega L} \sigma \upsilon \nu \omega t + K$$

Αν δεν υπάρχει κάποια συνεχής συνιστώσα του ρεύματος, τότε η σταθερά $K=0$, οπότε τελικά:

$$i = -\frac{V_o}{\omega L} \sigma \upsilon \nu \omega t = \frac{V_o}{\omega L} \cdot \left(-\eta \mu \left(\frac{\pi}{2} - \omega t \right) \right) = \frac{V_o}{\omega L} \cdot \eta \mu \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow$$

$$i = I_o \cdot \eta \mu \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Ορίζουμε ως εμπέδηση (επαγωγική αντίσταση) του πηνίου την ποσότητα $Z_L = \omega L$, οπότε για το πλάτος της έντασης του ρεύματος ισχύει:

$$I_o = \frac{V_o}{Z_L}$$

Εξίσωση που «παραπέμπει» επίσης στο νόμο του Ohm, όπου Z_L είναι η επαγωγική αντίσταση του πηνίου, αντίστοιχη της αντίστασης R , ενός αντιστάτη. Όσον αφορά την φάση της έντασης, αξίζει να επισημανθεί ότι τώρα η ένταση του ρεύματος καθυστερεί κατά $\pi/2$ της τάσης!

Ας μελετήσουμε τώρα ένα σύνθετο κύκλωμα που περιέχει αντίσταση, πυκνωτή και πηνίο.

• Εφαρμογή

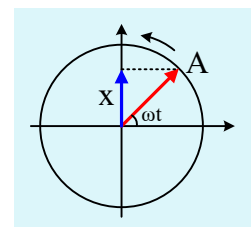
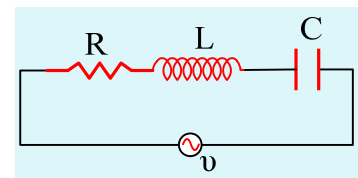
Για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος δίνονται $R=5\Omega$, $L=9\text{mH}$, $C=250\mu\text{F}$ ενώ η τάση της πηγής δίνεται από την εξίσωση:

$$v = 10\sqrt{2} \cdot \eta \mu(1.000t) \quad (S.I.).$$

Να βρεθούν οι εξισώσεις σε συνάρτηση με το χρόνο:

- της έντασης του ρεύματος.
- της τάσης στα άκρα κάθε στοιχείου του κυκλώματος.

Υπενθυμίζεται ότι όπως και στις ταλαντώσεις, όταν έχουμε ένα μέγεθος που μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο, όπως για παράδειγμα η απομάκρυνση σε μια ΑΑΤ, μπορεί να μελετηθεί με τη βοήθεια ενός περιστρεφόμενου διανύσματος, όπως στο σχήμα, όπου το διάνυσμα έχει μήκος όσο το πλάτος της ταλάντωσης ενώ η προβολή του στον άξονα y , μας δίνει την απομάκρυνση.



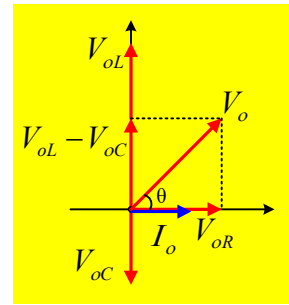
Απάντηση:

Για τις επιμέρους εμπεδήσεις έχουμε:

$$Z_L = \omega L = 1000 \cdot 9 \cdot 10^{-3} \Omega = 9\Omega$$

$$Z_C = \frac{I}{C\omega} = \frac{I}{250 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3} \Omega = 4 \Omega$$

Μπορούμε να παραστήσουμε τα πλάτη των επιμέρους τάσεων και το πλάτος της έντασης του ρεύματος με περιστρεφόμενα διανύσματα, οπότε αν το πλάτος του ρεύματος, κάποια στιγμή βρίσκεται στον άξονα x, όπως στο σχήμα, τότε την ίδια διεύθυνση θα έχει και το πλάτος της τάσης V_{oR} , αφού στην αντίσταση τάση και ένταση είναι μεγέθη συμφασικά. Αντίθετα το πλάτος V_{oL} προηγείται κατά $\pi/2$, ενώ το πλάτος V_{oC} καθυστερεί κατά $\pi/2$. Εφαρμογή των παραπάνω έχουμε στο διπλανό διάγραμμα, όπου αφού $Z_L > Z_C$, θα έχουμε και $V_{oL} > V_{oC}$.



Από την σύνθεση των διανυσμάτων για τα πλάτη των τάσεων, παίρνουμε:

$$V_o^2 = V_{oR}^2 + (V_{oL} - V_{oC})^2 \rightarrow V_o = \sqrt{I_o^2 R^2 + \left(I_o \omega L - I_o \frac{I}{C\omega}\right)^2} \rightarrow$$

$$V_o = I_o \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{I}{C\omega}\right)^2} \rightarrow \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{I}{C\omega}\right)^2} = \frac{V_o}{I_o}$$

Σε συμφωνία με την παραπάνω λογική το πηλίκο $\frac{V_o}{I_o}$ μας δίνει την εμπίδηση του κυκλώματος (την σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος), δηλαδή:

$$Z = \frac{V_o}{I_o}$$

Στο παράδειγμά μας για την τιμή της εμπίδησης έχουμε:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{I}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{5^2 + (9 - 4)^2} \Omega = 5\sqrt{2} \Omega$$

α) Με βάση τις παραπάνω τιμές το πλάτος της έντασης του ρεύματος είναι ίσο:

$$I_o = \frac{V_o}{Z} = \frac{10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} A = 2 A$$

Ενώ με βάση το παραπάνω διάγραμμα το διάνυσμα του I_o καθυστερεί του διανύσματος πλάτους τάσης της πηγής κατά γωνία θ , όπου:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{V_{oL} - V_{oC}}{V_{oR}} = \frac{I_o \omega L - I_o \frac{I}{C\omega}}{I_o R} = \frac{\omega L - \frac{I}{C\omega}}{R}$$

Και με αντικατάσταση:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\omega L - \frac{I}{C\omega}}{R} = \frac{9 - 4}{5} = 1 \text{ οπότε } \theta = \frac{\pi}{4}$$

Αλλά τότε η εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, έχει τη μορφή:

$$i = I_o \eta \mu \left(\omega t - \theta \right) = 2 \cdot \eta \mu \left(1000t - \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{μονάδες στο S.I.})$$

β) Για τα πλάτη των επιμέρους τάσεων, έχουμε:

$$V_{oR} = I_o R = 2 \cdot 5V = 10V$$

$$V_{oL} = I_o Z_L = 2 \cdot 9V = 18V$$

$$V_{oC} = I_o Z_C = 2 \cdot 4V = 8V$$

Ενώ για τις εξισώσεις των στιγμιαίων τάσεων, θα έχουμε:

$$v_R = V_{oR} \cdot \eta \mu \left(1000t - \frac{\pi}{4} \right) = 10 \cdot \eta \mu \left(1000t - \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{μονάδες στο S.I.})$$

Αφού η τάση και η ένταση είναι συμφασικές, ενώ:

$$v_L = V_{oL} \cdot \eta \mu \left(1000t + \frac{\pi}{4} \right) = 18 \cdot \eta \mu \left(1000t + \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{μονάδες στο S.I.})$$

$$v_C = V_{oC} \cdot \eta \mu \left(1000t - \theta - \frac{\pi}{2} \right) = 8 \cdot \eta \mu \left(1000t - \frac{3\pi}{4} \right) \quad (\text{μονάδες στο S.I.})$$

dmargaris@gmail.com