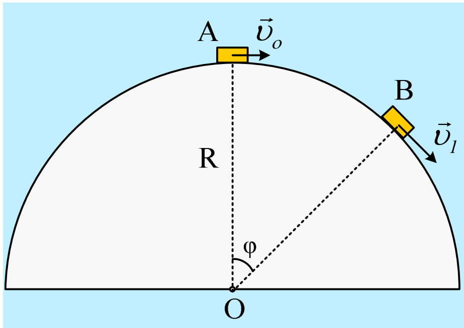
Όχι δεν είναι οριζόντια βολή

Ένα μικρό σώμα εκτοξεύεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα $υ_0$ από την κορυφή Α ενός λείου ημισφαιρίου. Η αρχική ταχύτητα είναι τέτοια που το σώμα κινείται σε επαφή με το ημισφαίριο και μετά από λίγο φτάνει στη θέση Β με ταχύτητα μέτρου $υ_1$.



Για την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας στη θέση Β ισχύει:

α) $υ_{1x} < υ_0$, β) $υ_{1x} = υ_0$, γ) $υ_{1x} > υ_0$.

Ας δούμε το θέμα από πιο αναλυτικά λύνοντας την παρακάτω άσκηση:

Άσκηση:

Ένα μικρό σώμα, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο αμελητέων διαστάσεων, εκτοξεύεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα $υ_0$=1m/s από την κορυφή Α ενός λείου ημισφαιρίου ακτίνας R=0,75m. Το σώμα κινείται σε επαφή με το ημισφαίριο και μετά από λίγο φτάνει στη θέση Β, έχοντας διαγράψει γωνία φ, όπου ημφ=0,6 και συνφ=0,8.

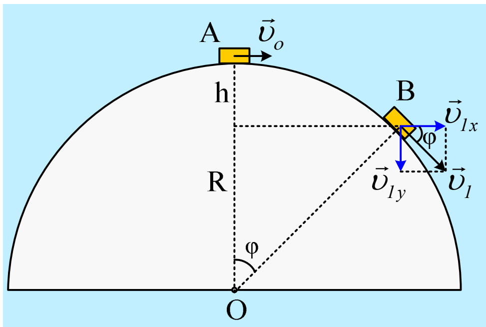
i) Να υπολογισθεί η ταχύτητα $υ_1$ το σώματος στη θέση Β, καθώς και η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας αυτής.

ii) Να υπολογιστεί η κεντρομόλος επιτάχυνση το σώματος στις θέσεις Α και Β, καθώς και το μέτρο της κάθετης αντίδρασης που δέχεται το σώμα από το ημισφαίριο στις θέσεις αυτές.

iii) Να υπολογιστεί η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης του σώματος στη θέση Β.

Απάντηση:

i) Δεχόμαστε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την θέση Β και εφαρμόζουμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Β:



$$K_A + U_A = K_B + U_B \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \xrightarrow{h=R(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gR(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)} = \sqrt{1^2 + 2\cdot 10\cdot 0{,}75(1-0{,}8)}m/s = 2m/s$$

Αλλά τότε αναλύοντας την παραπάνω ταχύτητας σε δύο συνιστώσες όπως στο σχήμα, θα έχουμε:

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_1\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = 2\cdot 0{,}8m/s = 1{,}6m/s$$

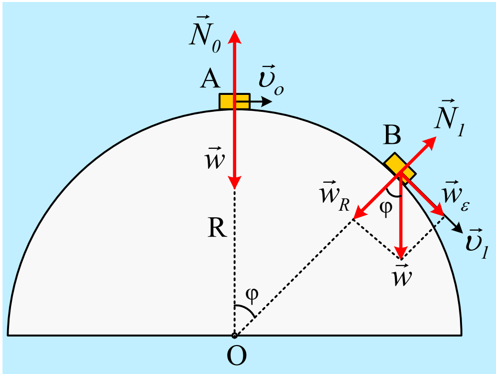
Αξίζει να προσέξουμε ότι $υ_{1x} > υ_0$ πράγμα που σημαίνει ότι το σώμα επιταχύνθηκε στην οριζόντια διεύθυνση, κατά την κίνησή του από τη θέση Α στην θέση Β.

ii) Η κίνηση από το Α μέχρι το Β είναι μια επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση. Για την κεντρομόλο επιτάχυνση στις θέσεις αυτές έχουμε:

$$\alpha_{\kappa 0} = \frac{\upsilon_0^2}{R} = \frac{1^2}{0,75} m/s^2 = \frac{4}{3} m/s^2 \text{ και}$$

$$\alpha_{\kappa 1} = \frac{\upsilon_1^2}{R} = \frac{2^2}{0,75} m/s^2 = \frac{16}{3} m/s^2$$

Παίρνοντας εξάλλου τις δυνάμεις στη διεύθυνση της ακτίνας, θα έχουμε από τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής, για την θέση Α:



$$\Sigma F_R = m\alpha_{\kappa 0} \to w - N_0 = m\alpha_{\kappa 0} \to N_0 = mg - m\alpha_{\kappa 0} \to$$

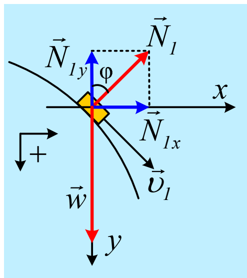
$$N_0 = 0,3\left(10 - \frac{4}{3}\right)N = 2,6N$$

Αντίστοιχα στη θέση Β:

$$\Sigma F_R = m\alpha_{\kappa 1} \to w_R - N_1 = m\alpha_{\kappa 1} \to N_1 = mg\sigma\upsilon\nu\varphi - m\alpha_{\kappa 1} \to$$

$$N_1 = 0,3\left(10 \cdot 0,8 - \frac{16}{3}\right)N = 0,8N$$

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουμε πάρει ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων x (οριζόντιος) και y (κατακόρυφος) και έχουμε αναλύσει την κάθετη αντίδραση του ημισφαιρίου N_1, πάνω στους άξονες. Εφαρμόζουμε τώρα το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής στους άξονες αυτούς (με προσανατολισμό όπως στο σχήμα):



$$\Sigma F_x = m\alpha_x \to N_{1x} = m\alpha_x \to a_x = \frac{N_1 \cdot \eta\mu\varphi}{m} = \frac{0,8 \cdot 0,6}{0,3} m/s^2 = 1,6m/s^2$$

$$\Sigma F_y = m\alpha_y \to w - N_{1y} = m\alpha_y \to a_y = g - \frac{N_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}{m} \to$$

$$a_y = 10m/s^2 - \frac{0,8 \cdot 0,8}{0,3} m/s^2 = 7,9m/s^2$$

Αξίζει να προσέξουμε ότι στην διεύθυνση x το σώμα επιταχύνεται προς τα δεξιά, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας, όπως διαπιστώσαμε και στο i) ερώτημα.

Συμπεράσματα:

Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε δύο διαφορετικά συστήματα ορθογωνίων αξόνων στην μελέτη μας.

- Το πρώτο σύστημα έχει τον ένα άξονα εφαπτόμενο στην τροχιά και τον άλλον στην διεύθυνση της ακτίνας. Στο σύστημα αυτό, μιλάμε για κεντρομόλο επιτάχυνση- δύναμη η οποία μεταβάλει την διεύθυνση της ταχύτητας, ενώ στη διεύθυνση της εφαπτόμενης του κύκλου μιλάμε για γραμμική ταχύτητα και αντίστοιχη επιτάχυνση (την λέμε και επιτρόχια επιτάχυνση…) στη διεύθυνση της ταχύτητας, η οποία μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας.

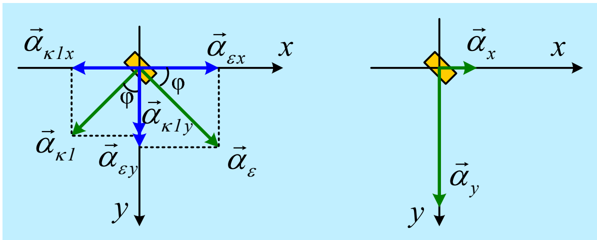
- Το δεύτερο σύστημα αξόνων είναι το «γνωστό» μας σε οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση. Στο σύστημα αυτό **δεν** μιλάμε για κεντρομόλο επιτάχυνση, απλά βρίσκουμε ταχύτητες και επιταχύνσεις στις δυο διευθύνσεις.

Είναι συμβατά τα αποτελέσματα που δίνει η μελέτη με τον α ή β τρόπο;

Ας επιστρέψουμε στο σύστημα με κεντρομόλο δύναμη, Έχουμε υπολογίσει ήδη την κεντρομόλο επιτάχυνση στη θέση Α. Ας υπολογίσουμε και την επιτρόχια επιτάχυνση με βάση το σχήμα στο ii) ερώτημα:

$$\Sigma F_{\varepsilon} = m\alpha_{\varepsilon} \rightarrow mg \cdot \eta\mu\varphi = m\alpha_{\varepsilon} \rightarrow \alpha_{\varepsilon} = g \cdot \eta\mu\varphi = 10 \cdot 0{,}6 m/s^2 = 6 m/s^2$$

Αν τώρα αναλύσουμε την κεντρομόλο και την επιτρόχια επιτάχυνση σε οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση, όπως στο παρακάτω σχήμα, θα πάρουμε:



$$\alpha_x = \alpha_{\varepsilon x} - a_{\kappa 1x} = a_{\varepsilon} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi - \alpha_{\kappa 1} \cdot \eta\mu\varphi = \left(6 \cdot 0{,}8 - \frac{16}{3} \cdot 0{,}6\right) m/s^2 = 1{,}6 m/s^2$$

$$\alpha_y = \alpha_{\varepsilon y} + a_{\kappa 1y} = a_{\varepsilon} \cdot \eta\mu\varphi + \alpha_{\kappa 1} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \left(6 \cdot 0{,}6 + \frac{16}{3} \cdot 0{,}8\right) m/s^2 = 7{,}9 m/s^2$$

Αποτελέσματα που είχαμε βρει και στο iii) ερώτημα.

dmargaris@gmail.com