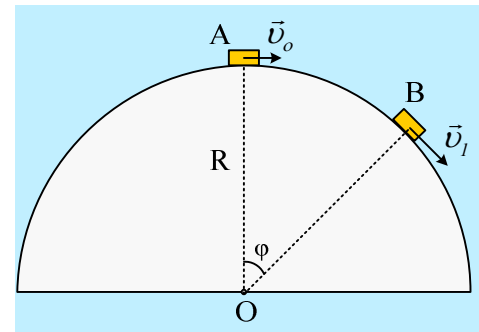


Αλλάζοντας άξονες στην κυκλική κίνηση

Σαν απάντηση σε ένα ερώτημα στο φόρουμ «[Όχι δεν είναι οριζόντια βολή](#)», ας δούμε μια μελέτη κυκλικής κίνησης και με την κλασσική μέθοδο (Μελέτη για κύκλο με κεντρομόλο και εφαπτομενική διεύθυνση...), αλλά και χρησιμοποιώντας ορθογώνιους άξονες στο επίπεδο με οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση.

Άσκηση:

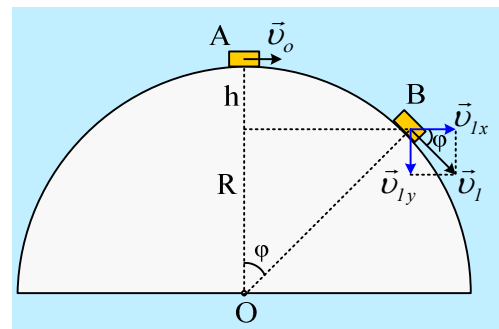
Ένα μικρό σώμα, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο αμελητέων διαστάσεων, εκτοξεύεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα $v_0=1\text{m/s}$ από την κορυφή Α ενός λείου ημισφαιρίου ακτίνας $R=0,75\text{m}$. Το σώμα κινείται σε επαφή με το ημισφαίριο και μετά από λίγο φτάνει στη θέση Β, έχοντας διαγράψει γωνία φ , όπου $\eta\mu\varphi=0,6$ και $\sigma\upsilon\eta\varphi=0,8$.



- i) Να υπολογισθεί η ταχύτητα v_l το σώματος στη θέση Β, καθώς και η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας αυτής.
- ii) Να υπολογιστεί η κεντρομόλος επιτάχυνση το σώματος στις θέσεις Α και Β, καθώς και το μέτρο της κάθετης αντίδρασης που δέχεται το σώμα από το ημισφαίριο στις θέσεις αυτές.
- iii) Να υπολογιστεί η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης του σώματος στη θέση Β.

Απάντηση:

- i) Δεχόμαστε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την θέση Β και εφαρμόζουμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Β:



$$K_A + U_A = K_B + U_B \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_l^2 \xrightarrow{h=R(1-\sigma\upsilon\eta\varphi)}$$

$$v_l = \sqrt{v_0^2 + 2gR(1 - \sigma\upsilon\eta\varphi)} = \sqrt{1^2 + 2 \cdot 10 \cdot 0,75(1 - 0,8)} \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

Αλλά τότε αναλύοντας την παραπάνω ταχύτητας σε δύο συνιστώσες όπως στο σχήμα, θα έχουμε:

$$v_{lx} = v_l \cdot \sigma\upsilon\eta\varphi = 2 \cdot 0,8 \text{ m/s} = 1,6 \text{ m/s}$$

Αξίζει να προσέξουμε ότι $v_{lx} > v_0$ πράγμα που σημαίνει ότι το σώμα επιταχύνθηκε στην οριζόντια διεύθυνση, κατά την κίνησή του από τη θέση Α στην θέση Β.

- ii) Η κίνηση από το Α μέχρι το Β είναι μια επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση. Για την κεντρομόλο επιτάχυνση στις θέσεις αυτές έχουμε:

$$a_{\kappa 0} = \frac{v_0^2}{R} = \frac{1^2}{0,75} \text{ m/s}^2 = \frac{4}{3} \text{ m/s}^2 \text{ και}$$

$$\alpha_{\kappa l} = \frac{v_l^2}{R} = \frac{2^2}{0,75} m/s^2 = \frac{16}{3} m/s^2$$

Παίρνοντας εξάλλου τις δυνάμεις στη διεύθυνση της ακτίνας, θα έχουμε από τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής, για την θέση Α:

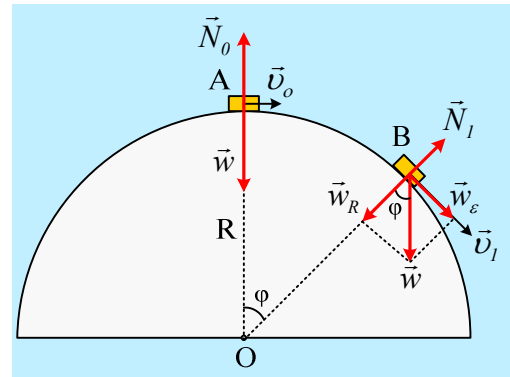
$$\Sigma F_R = m\alpha_{\kappa 0} \rightarrow w - N_0 = m\alpha_{\kappa 0} \rightarrow N_0 = mg - m\alpha_{\kappa 0} \rightarrow$$

$$N_0 = 0,3 \left(10 - \frac{4}{3} \right) N = 2,6 N$$

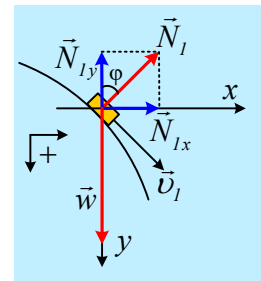
Αντίστοιχα στη θέση Β:

$$\Sigma F_R = m\alpha_{\kappa l} \rightarrow w_R - N_l = m\alpha_{\kappa l} \rightarrow N_l = mg \sin \varphi - m\alpha_{\kappa l} \rightarrow$$

$$N_l = 0,3 \left(10 \cdot 0,8 - \frac{16}{3} \right) N = 0,8 N$$



iii) Στο διπλανό σχήμα έχουμε πάρει ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων x (οριζόντιος) και y (κατακόρυφος) και έχουμε αναλύσει την κάθετη αντίδραση του ημισφαιρίου N_l , πάνω στους άξονες. Εφαρμόζουμε τώρα το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής στους άξονες αυτούς (με προσανατολισμό όπως στο σχήμα):



$$\Sigma F_x = m\alpha_x \rightarrow N_{lx} = m\alpha_x \rightarrow a_x = \frac{N_l \cdot \eta \mu \varphi}{m} = \frac{0,8 \cdot 0,6}{0,3} m/s^2 = 1,6 m/s^2$$

$$\Sigma F_y = m\alpha_y \rightarrow w - N_{ly} = m\alpha_y \rightarrow a_y = g - \frac{N_l \cdot \sigma \nu \nu \varphi}{m}$$

$$a_y = 10 m/s^2 - \frac{0,8 \cdot 0,8}{0,3} m/s^2 = 7,9 m/s^2$$

Αξίζει να προσέξουμε ότι στην διεύθυνση x το σώμα επιταχύνεται προς τα δεξιά, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας, όπως διαπιστώσαμε και στο i) ερώτημα.

Συμπεράσματα:

Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε δύο διαφορετικά συστήματα ορθογωνίων αξόνων στην μελέτη μας.

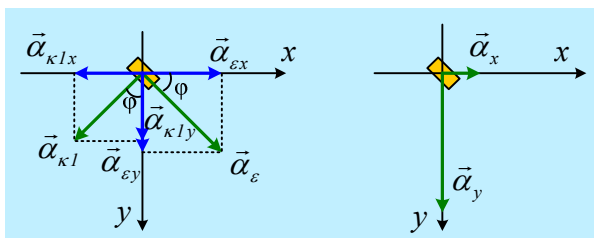
- Το πρώτο σύστημα έχει τον ένα άξονα εφαπτόμενο στην τροχιά και τον άλλον στην διεύθυνση της ακτίνας. Στο σύστημα αυτό, μιλάμε για κεντρομόλο επιτάχυνση- δύναμη η οποία μεταβάλλει την διεύθυνση της ταχύτητας, ενώ στη διεύθυνση της εφαπτόμενης του κύκλου μιλάμε για γραμμική ταχύτητα και αντίστοιχη επιτάχυνση (την λέμε και επιτροχία επιτάχυνση...) στη διεύθυνση της ταχύτητας, η οποία μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας.
- Το δεύτερο σύστημα αξόνων είναι το «γνωστό» μας σε οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση. Στο σύστημα αυτό **δεν** μιλάμε για κεντρομόλο επιτάχυνση, αλλά βρίσκουμε ταχύτητες και επιταχύνσεις στις δυο διευθύνσεις.

Είναι συμβατά τα αποτελέσματα που δίνει η μελέτη με τον α ή β τρόπο;

Ας επιστρέψουμε στο σύστημα με κεντρομόλο δύναμη, Έχουμε υπολογίσει ήδη την κεντρομόλο επιτάχυνση στη θέση Α. Ας υπολογίσουμε και την επιτροχια επιτάχυνση με βάση το σχήμα στο ii) ερώτημα:

$$\Sigma F_c = m a_c \rightarrow m g \cdot \eta \mu \varphi = m a_c \rightarrow a_c = g \cdot \eta \mu \varphi = 10 \cdot 0,6 \text{ m/s}^2 = 6 \text{ m/s}^2$$

Αν τώρα αναλύσουμε την κεντρομόλο και την επιτροχια επιτάχυνση σε οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση, όπως στο παρακάτω σχήμα, θα πάρουμε:



$$a_x = a_{cx} - a_{clx} = a_c \cdot \sigma \nu \nu \varphi - a_{cl} \cdot \eta \mu \varphi = \left(6 \cdot 0,8 - \frac{16}{3} \cdot 0,6 \right) \text{ m/s}^2 = 1,6 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = a_{cy} - a_{cly} = a_c \cdot \eta \mu \varphi - a_{cl} \cdot \sigma \nu \nu \varphi = \left(6 \cdot 0,6 + \frac{16}{3} \cdot 0,8 \right) \text{ m/s}^2 = 7,9 \text{ m/s}^2$$

Αποτελέσματα που είχαμε βρει και στο iii) ερώτημα.

dmargaris@gmail.com