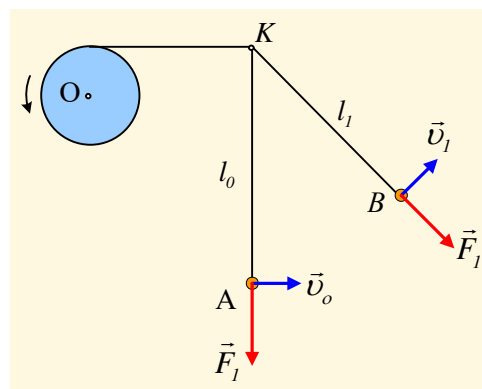
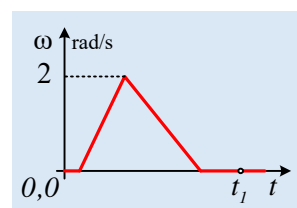


Αλλάζοντας την τροχιά, κατά την περιφορά

Μια σφαίρα μάζας 2kg, την οποία θεωρούμε υλικό σημείο, βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένη στο άκρο μη εκτατού νήματος, το οποίο αφού περάσει από ένα καρφάκι K, οδηγείται σε ένα κύλινδρο, στην επιφάνεια του του οποίου προσκολλάται. Ο κύλινδρος έχει ακτίνα $r=0,4\text{m}$ και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος ταυτίζεται με τον άξονά του που συνδέει τα κέντρα των δύο βάσεων του. Η σφαίρα βρίσκεται στη θέση A, απέχοντας κατά $l_0=2\text{m}$ από το K, ενώ πάνω



της ασκείται μια σταθερού μέτρου δύναμη $F_1=2\text{N}$, η οποία εξασφαλίζει το τένωμα του νήματος. Σε μια στιγμή $t=0$ εκτοξεύουμε οριζόντια τη σφαίρα με ταχύτητα $v_0=0,9\text{m/s}$, κάθετα στο νήμα όπως στο σχήμα (σε κάτοψη). Μετά από λίγο θέτουμε σε περιστροφή αριστερόστροφα τον κύλινδρο για χρονικό διάστημα $0,5\text{s}$, μεταβάλλοντας την γωνιακή του ταχύτητα όπως στο διάγραμμα, οπότε την στιγμή t_1 η σφαίρα φτάνει στην θέση B, με ταχύτητα v_1 κάθετη επίσης στο νήμα, ενώ διαρκώς της ασκείται η δύναμη F_1 .



- i) Να υπολογισθεί η γωνία κατά την οποία περιστρέψαμε τον κύλινδρο, καθώς και το μήκος του νήματος που τυλίχθηκε γύρω του, στη διάρκεια της περιστροφής.
- ii) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητα v_1 καθώς και η τάση του νήματος στις θέσεις A και B.
- iii) Γιατί στη διάρκεια της περιστροφής του κυλίνδρου, η σφαίρα είχε συνιστώσα ταχύτητας στη διεύθυνση του νήματος;
 - α) Να βρεθεί το μέγιστο μέτρο της συνιστώσας αυτής v_R ;
 - β) Να υπολογιστεί ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρει ενέργεια στη σφαίρα η δύναμη F_1 , τη στιγμή της μέγιστης v_R .

Απάντηση:

- i) Το εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου στο διπλανό σχήμα, είναι αριθμητικά ίσο με την γωνία στροφής του κυλίνδρου στο χρονικό διάστημα $\Delta t=0,5\text{s}$.

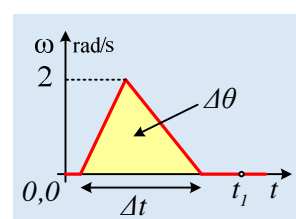
$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \beta v = \frac{1}{2} 0,5 \cdot 2\text{rad} = 0,5\text{rad}$$

Γωνία στην οποία αντιστοιχεί τόξο μήκους:

$$\Delta s = \Delta\theta \cdot r = 0,5 \cdot 0,4\text{m} = 0,2\text{m}$$

Τόσο είναι και το μήκος του νήματος που τυλίγεται στον κύλινδρο, στο παραπάνω χρονικό διάστημα Δt , δηλαδή $\Delta l=0,2\text{m}$.

- ii) Μόλις εκτοξευθεί η σφαίρα και μέχρι τη στιγμή που θέτουμε σε περιστροφή τον κύλινδρο, εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $R_0=l_0$. Ομαλή κυκλική κίνηση εκτελεί η σφαίρα και μόλις πάσουμε να



περιστρέφουμε τον κύλινδρο, μέχρι και τη στιγμή t_1 , με ακτίνα $R_1=l_1=l_0-\Delta l=2\text{m}-0,2\text{m}=1,8\text{m}$. Σε όλο όμως το χρόνο από $0-t_1$ η τάση του νήματος κατευθύνεται προς το καρφί K, όπου είναι το κέντρο των δύο παραπάνω κυκλικών τροχιών, ενώ από το K διέρχεται και ο φορέας της δύναμης F, οπότε οι ροπές και των δύο δυνάμεων είναι μηδενικές, συνεπώς η στροφορμή της σφαίρας, ως προς το K, παραμένει σταθερή.

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_1$$

Όπου και τα δύο διανύσματα είναι κατακόρυφα με φορά προς τα πάνω. Άρα:

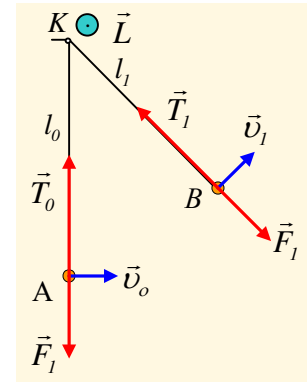
$$\vec{L}_0 = \vec{L}_1 \rightarrow mv_0 R_0 = mv_1 R_1 \rightarrow v_0 R_0 = v_1 R_1 \rightarrow$$

$$v_1 = v_0 \frac{R_0}{R_1} = 0,9 \cdot \frac{2}{1,8} \text{ m/s} = 1 \text{ m/s}$$

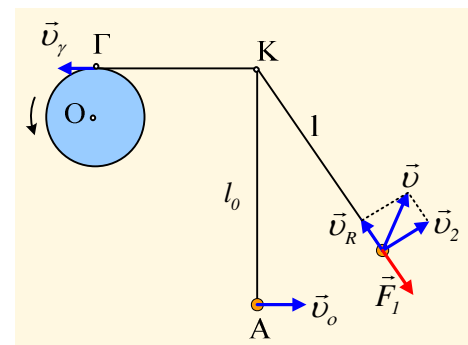
Ενώ για τα μέτρα των δύο τάσεων στις θέσεις A και B, έχουμε:

$$\Sigma F_0 = m \frac{v_0^2}{R_0} \rightarrow T_0 - F_1 = m \frac{v_0^2}{R_0} \rightarrow T_0 = 2\text{N} + 2 \cdot \frac{0,9^2}{2} \text{ N} = 2,81\text{N}$$

$$\Sigma F_1 = m \frac{v_1^2}{R_1} \rightarrow T_1 - F_1 = m \frac{v_1^2}{R_1} \rightarrow T_1 = 2\text{N} + 2 \cdot \frac{1^2}{1,8} \text{ N} = 3,1\text{N}$$



- iii) Καθώς ο κύλινδρος περιστρέφεται το νήμα τυλίγεται πάνω του, πράγμα που σημαίνει ότι το ελεύθερο μήκος του μειώνεται. Αλλά τότε ελαττώνεται και η ακτίνα της τροχιάς που διαγράφει η σφαίρα, πράγμα που σημαίνει ότι η σφαίρα έχει κάποια ταχύτητα, η οποία μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες, μια κάθετη στο νήμα v_2 και μια στη διεύθυνσή του v_R , ίση με την ταχύτητα κάθε σημείου του νήματος, συνεπώς ίση και με την γραμμική ταχύτητα του σημείου Γ, όπως στο σχήμα.



- α) Αν τώρα έρθουμε στον κύλινδρο, το σημείο που το νήμα αρχίζει να εφάπτεται σε αυτόν, το σημείο Γ, έχει γραμμική ταχύτητα $v_\gamma = \omega r$ και την ίδια ταχύτητα αποκτά και το αντίστοιχο σημείο του νήματος, συνεπώς και κάθε σημείο του νήματος, άρα και η σφαίρα. Αλλά τότε $v_R = v_\gamma = \omega r$ και η ταχύτητα αυτή γίνεται μέγιστη όταν μεγιστοποιείται η γωνιακή ταχύτητα, οπότε:

$$v_{R,max} = \omega_{max} \cdot r = 2 \cdot 0,4 \text{ m/s} = 0,8 \text{ m/s}$$

- β) Ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρει ενέργεια στη σφαίρα η δύναμη F_1 , είναι ίσος με την ισχύ της δύναμης:

$$P_1 = F_1 v \cdot \sin \alpha = -F_1 \cdot v_R = -2 \cdot 0,8 \text{ W} = -1,6 \text{ W}$$

Όπου α η γωνία μεταξύ της δύναμης και της ταχύτητας, αλλά αν παρατηρήσουμε ότι η δύναμη δεν παράγει έργο εξαιτίας της κάθετης στο νήμα συνιστώσας ταχύτητας v_2 , καταλήγουμε στο έργο (και στην ισχύ) εξαιτίας της v_R . Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι μέσω του έργου της δύναμης αφαιρείται ενέργεια από τη σφαίρα με ρυθμό $1,6\text{J/s}$.