

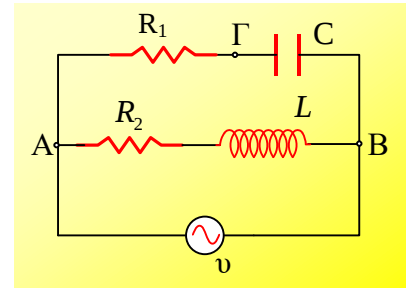
Αλλάζουμε ξανά την πηγή

Επανερχόμαστε στο κύκλωμα της ανάρτησης:

«Δύο χρονοκυκλώματα μαζί!»

αλλά τώρα η πηγή τροφοδοσίας είναι ένας εναλλακτήρας η στιγμιαία τάση του οποίου δίνεται από την εξίσωση $v = 80\sqrt{2}\eta\mu(1000t)$ (S.I.).

Δίνονται για το κύκλωμα $R_1=R_2=R=40\Omega$, $C=25\mu\text{F}$, ενώ το ιδανικό πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L=0,04\text{H}$.



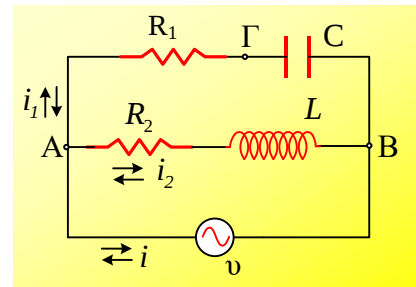
- i) Να βρεθεί η εξίσωση $i=f(t)$ της έντασης του ρεύματος που διαρρέει κάθε κλάδο του κυκλώματος.
- ii) Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του ηλεκτρικού ρεύματος, που διαρρέει το κύκλωμα.
- iii) Να υπολογιστούν η μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή και στο πηνίο.
- iv) Υποστηρίζεται η άποψη ότι «τη στιγμή που η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή είναι μέγιστη, η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου είναι μηδενική και αντίστροφα». Να εξετάσετε την ορθότητα της άποψης αυτής.

Απάντηση:

Έστω i , i_1 και i_2 οι στιγμιαίες εντάσεις των ρευμάτων που διαρρέουν τους τρεις κλάδους του κυκλώματος, όπως στο σχήμα, όπου I , I_1 και I_2 τα αντίστοιχα πλάτη. Για τις εμπεδήσεις πυκνωτή και πηνίου έχουμε:

$$Z_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} \Omega = 40 \Omega$$

$$Z_L = L\omega = 0,04 \cdot 1000 \Omega = 40 \Omega$$



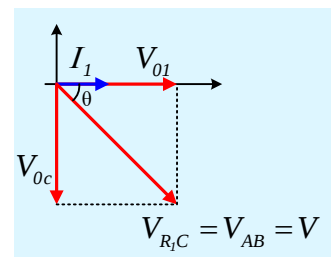
- i) Ο κλάδος ΑΓΒ περιέχει μια αντίσταση και ένα πυκνωτή σε σειρά, στα άκρα των οποίων επικρατεί τάση v . Η εμπεδήση του κλάδου είναι ίση:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{40^2 + 40^2} \Omega = 40\sqrt{2} \Omega$$

Οπότε ο κλάδος διαρρέεται από ένταση i_1 με πλάτος I_1 :

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{80\sqrt{2}}{40\sqrt{2}} \text{ A} = 2 \text{ A} \text{ ενώ}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = -\frac{1}{\omega C R_1} = -\frac{40 \Omega}{40 \Omega} = -1 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$



Με βάση τις τιμές αυτές, μπορούμε να σχεδιάσουμε το διανυσματικό διάγραμμα για τον κλάδο, παίρνοντας το παραπάνω σχήμα, όπου $V_{01} = V_{0c} = 80\text{V}$, όπου αρνητική γωνία θ , σημαίνει ότι η τάση

καθυστερεί σε σχέση με την ένταση του ρεύματος.

Αλλά τότε η εξίσωση της έντασης του ρεύματος i_1 που διαρρέει τον κλάδο, έχει τη μορφή:

$$i_1 = I_1 \cdot \eta\mu\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \eta\mu\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{S.I.})$$

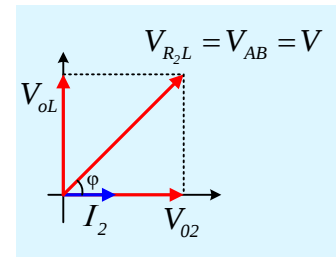
Με την ίδια λογική ο κλάδος AB περιέχει μια αντίσταση και ένα ιδανικό πηνίο σε σειρά, στα άκρα των οποίων επικρατεί τάση v . Η εμπίεση του κλάδου είναι ίση:

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{40^2 + 40^2} \Omega = 40\sqrt{2} \Omega$$

Οπότε ο κλάδος διαρρέεται από ένταση i_2 με πλάτος I_2 :

$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{80\sqrt{2}}{40\sqrt{2}} A = 2 A \quad \text{ενώ}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\omega L}{R_2} = \frac{40\Omega}{40\Omega} = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$



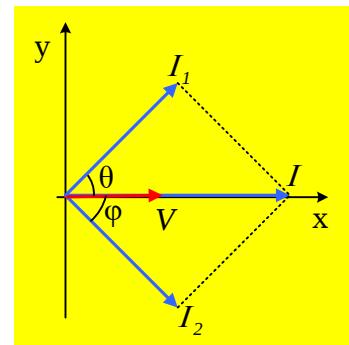
Με βάση τις τιμές αυτές, σχεδιάζουμε το διανυσματικό διάγραμμα για τον κλάδο, παίρνοντας το παραπάνω σχήμα, όπου $V_{02} = V_{0L} = 80V$.

Συνεπώς η εξίσωση της έντασης του ρεύματος i_2 που διαρρέει τον κλάδο, έχει τη μορφή:

$$i_2 = I_2 \cdot \eta\mu\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \eta\mu\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{S.I.})$$

Ας κάνουμε τώρα ένα διανυσματικό διάγραμμα για τα πλάτη των εντάσεων του ρεύματος, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου έχουμε μεταφέρει στον άξονα x το πλάτος της τάσης V , οπότε το πλάτος της έντασης I_1 προηγείται κατά $\pi/4$, ενώ το πλάτος I_2 , καθυστερεί κατά $\pi/4$ της τάσης V . Τότε από τον σχηματιζόμενο τετράγωνο παίρνουμε για το πλάτος της ολικής έντασης του ρεύματος I :

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} A = 2\sqrt{2} A$$



Ενώ η διαγώνιος του τετραγώνου είναι και διχοτόμος με αποτέλεσμα αφού $\theta = \varphi$, το διάνυσμα I έχει την ίδια κατεύθυνση με το πλάτος της τάσης V , με άλλα λόγια η τάση και η ένταση είναι συμφασικά μεγέθη, με αποτέλεσμα να παίρνουμε την εξίσωση:

$$i = 2\sqrt{2} \cdot \eta\mu(1000t) \quad (\text{S.I.})$$

- ii) Η μέση ισχύς του πυκνωτή και του ιδανικού πηνίου είναι μηδενικές, οπότε ηλεκτρική ενέργεια καταναλώνεται μόνο στις αντιστάσεις, η οποία μετατρέπεται σε θερμότητα:

$$\bar{P} = I_{1,\varepsilon\nu}^2 R_1 + I_{2,\varepsilon\nu}^2 R_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 40W + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 40W = 160W$$

Βέβαια το ίδιο μπορούμε να υπολογίσουμε, με την βοήθεια του συντελεστή ισχύος:

$$\bar{P} = V_{\varepsilon V} \cdot I_{\varepsilon V} \cdot \cos \varphi = \frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot 1W = 160W$$

iii) Για τη μέγιστη ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή έχουμε:

$$U_{C,max} = \frac{1}{2} C V_{0C}^2 = \frac{1}{2} 25 \cdot 10^{-6} \cdot 80^2 J = 0,08 J$$

Ενώ για την μέγιστη ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου αντίστοιχα:

$$U_{L,max} = \frac{1}{2} L I_2^2 = \frac{1}{2} 0,04 \cdot 2^2 J = 0,08 J$$

Παρατηρούμε ότι οι δυο παραπάνω ενέργειες είναι ίσες.

iv) Η ενέργεια του πυκνωτή είναι μέγιστη τις χρονικές στιγμές όπου η τάση v_C είναι μέγιστη (κατά απόλυτο τιμή). Αυτό συμβαίνει όταν:

$$v_C = V_{0C} \cdot \eta\mu\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 80V \quad \text{ή} \quad \eta\mu\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$$

Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου γίνεται μέγιστη, όταν η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει γίνεται (κατά απόλυτο τιμή) μέγιστη:

$$i_2 = 2 \cdot \eta\mu\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 2 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$$

Παρατηρούμε ότι η μεγιστοποίηση των δύο ενεργειών πραγματοποιείται τις ίδιες χρονικές στιγμές! Η θέση που διατυπώθηκε, η οποία θυμίζει το ηλεκτρομαγνητικό κύμα, αλλά και τον συντονισμό στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις, όπου πηνίο και πυκνωτής συνδέονται σε σειρά, δεν ισχύει όταν έχουμε παράλληλη σύνδεση, όπως παραπάνω.

Σχόλιο:

Ας πάρουμε το ίδιο πηνίο και πυκνωτή, αλλά στο διπλανό κύκλωμα, όπου συνδέονται σε σειρά, ενώ $R=R_1$ και η ίδια πηγή Α.Σ.

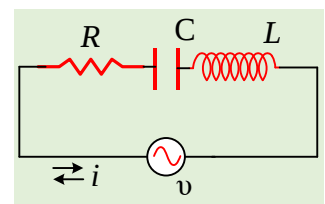
Τώρα η εμπέδηση του κυκλώματος είναι ίση με:

$$Z = \sqrt{R_2^2 + \left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{40^2 + (40 - 40)^2} \Omega = 40 \Omega$$

Οπότε το πλάτος της έντασης είναι ίσο:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{80\sqrt{2}}{40} A = 2\sqrt{2} A$$

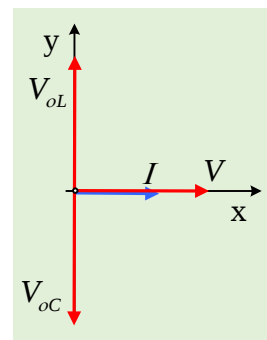
Ενώ για την διαφορά φάσης μεταξύ έντασης και τάσης, έχουμε:



$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{C\omega}}{R} = 0$$

Το αντίστοιχο διανυσματικό διάγραμμα είναι αυτό του διπλανού σχήματος.

Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι έχουμε τις ίδιες εξισώσεις με πριν για τάση και ένταση (και για τις επιμέρους τάσεις και για τις ενέργειες...), που είχαμε την παράλληλη σύνδεση!!!



Εδώ πράγματι το κύκλωμα είναι σε **συντονισμό**! Για να μην καταλήξουμε να χαθούμε στις εξισώσεις, αρκεί να σκεφτούμε δυο πράγματα.

Όταν η τάση του πυκνωτή είναι μέγιστη (άρα μέγιστη και η ενέργεια του πυκνωτή), τότε η ένταση είναι μηδενική (οπότε και μηδενική η ενέργεια του πηνίου).

Οι τάσεις πυκνωτή και πηνίου είναι κάθε φορά αντίθετες, συνεπώς για την στιγμιαία ισχύ πυκνωτή και πηνίου θα ισχύει $P_C = -P_L$. Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια μεταφέρεται από τον πυκνωτή στο πηνίο και αντίστροφα...

dmargaris@gmail.com