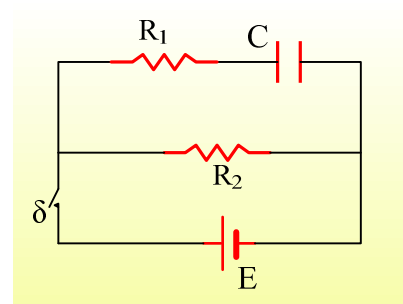


Αντί για ένα πηνίο, ένας πυκνωτής.

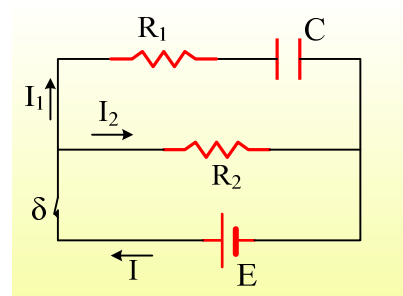
Για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος, δίνονται $E=100V$, $C=100\mu F$ και $R_1=R_2=R=10k\Omega$, ενώ ο διακόπτης δ είναι ανοικτός. Σε μια στιγμή $t_0=0$ κλείνουμε το διακόπτη, οπότε μετά από λίγο, τη στιγμή t_1 , η τάση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι ίση με το 80% της μέγιστης τιμής της. Για τη στιγμή t_1 , να βρεθούν:



- i) Ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια στον πυκνωτή καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της τάσης μεταξύ των οπλισμών του.
- ii) Η ισχύς της πηγής τις χρονικές στιγμές t_0 (αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη) και t_1 .
- iii) Αν τη στιγμή t_1 ανοίξουμε το διακόπτη:
 - α) Να κάνετε ένα ποιοτικό διάγραμμα της έντασης του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_1 , από τη στιγμή $t=0$, μέχρι τη στιγμή που ο πυκνωτής εκφορτίζεται.
 - β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν των χωρίων που σχηματίζονται από την παραπάνω γραφική παράσταση και τον άξονα των χρόνων.
 - γ) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_1 , τη χρονική στιγμή t_2 που η τάση στα άκρα του είναι ίση με 50V;

Απάντηση:

Μόλις κλείσουμε το διακόπτη οι κλάδοι του κυκλώματος διαρρέονται από ρεύματα, όπως στο σχήμα. Ο αντιστάτης R_1 θα διαρρέεται από ρεύμα, για όσο χρόνο υπάρχει τάση στα άκρα της, πράγμα που σημαίνει μέχρι ο πυκνωτής αποκτήσει τάση $V_c=E=100V$. Αλλά τότε τη στιγμή t_1 ο πυκνωτής έχει τάση μεταξύ των οπλισμών του $V_{c1}=80V$.



- i) Από τον 2° κανόνα του Kirchhoff έχουμε:

$$E - I_1 R_1 - V_{c1} = 0 \rightarrow I_1 = \frac{E - V_{c1}}{R_1} = \frac{100V - 80V}{10.000\Omega} = 2mA$$

Οπότε η ισχύς που το ηλεκτρικό ρεύμα μεταφέρει στον πυκνωτή, ίση με το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή, είναι ίση:

$$P_c = V_c I_1 = 80 \cdot 2 \cdot 10^{-3} W = 0,16W$$

Ενώ για τον ρυθμό μεταβολής της τάσης μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή, έχουμε:

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{d\left(\frac{q}{C}\right)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{1}{C} \cdot I_1 = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} V/s = 20 V/s$$

- ii) Μόλις κλείσουμε το διακόπτη οι δύο αντιστάτες διαρρέονται από ρεύματα με εντάσεις:

$$I_{01} = \frac{E - V_{0c}}{R_2} = \frac{100V - 0}{10.000\Omega} = 0,01A = 10mA$$

$$I_2 = \frac{E}{R_2} = \frac{100V}{10.000\Omega} = 0,01A = 10mA$$

Αλλά τότε η πηγή διαρρέεται από ρεύμα έντασης:

$$I_0 = I_{01} + I_2 = 10mA + 10mA = 20mA$$

Και η ισχύς της πηγής είναι:

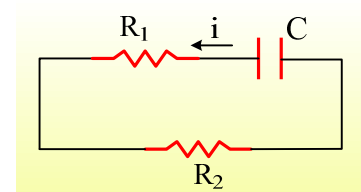
$$P_0 = EI_0 = 100 \cdot 20 \cdot 10^{-3} W = 2W$$

Όμοια για τη στιγμή t_1 θα έχουμε:

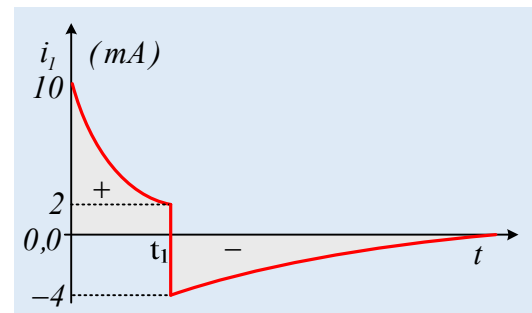
$$P_1 = EI_{t_1} = E(I_1 + I_2) = 100 \cdot (2 + 10) \cdot 10^{-3} W = 1,2W$$

iii) Μόλις ανοίξουμε το διακόπτη, παίρνουμε το διπλανό κύκλωμα, όπου ο πυκνωτής εκφορτίζεται με ρεύμα έντασης i . Η αρχική ένταση έχει τιμή:

$$i_0 = \frac{V_{lc}}{R_1 + R_2} = \frac{V_{lc}}{2R} = \frac{80}{2 \cdot 10 \cdot 10^3} A = 4mA$$



α) Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω ευρήματα και θεωρώντας την αρχική ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_1 ως θετική, σχεδιάζουμε το διάγραμμα της έντασης i_1 σε συνάρτηση με το χρόνο, παίρνοντας το διπλανό διάγραμμα.



β) Το εμβαδόν του γκρι χωρίου από 0- t_1 εκφράζει το φορτίο που αποθηκεύεται στον πυκνωτή συνεπώς είναι ίσο:

$$Q_1 = C \cdot V_{lc} = 100 \cdot 10^{-6} F \cdot 80V = 8mC$$

Το παραπάνω φορτίο περνά ξανά από τον αντιστάτη R_1 μετά το άνοιγμα του διακόπτη, κινούμενο με αντίθετη φορά (γι' αυτό και το αρνητικό πρόσημο της έντασης), οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$Q_2 = -8mC$$

γ) Με τον διακόπτη κλειστό ο αντιστάτης R_1 έχει τάση στα άκρα του η οποία μεταβάλλεται από τα 100V στα 20V, ενώ με ανοικτό το διακόπτη η μέγιστη τάση στα άκρα του (η διαφορά δυναμικού κατά απόλυτο τιμή) ίση με 40V. Συνεπώς τάση 50V έχει την στιγμή t_2 με το διακόπτη κλειστό. Τότε όμως το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$i_1 = \frac{V_{R_1}}{R_1} = \frac{50}{10 \cdot 10^3} A = 5mA$$

Οπότε από 2° Κ.Κ παίρνουμε:

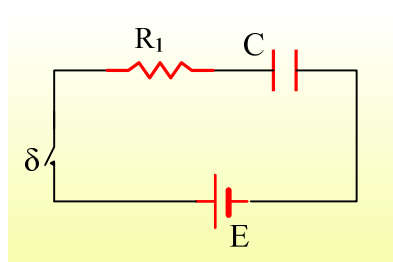
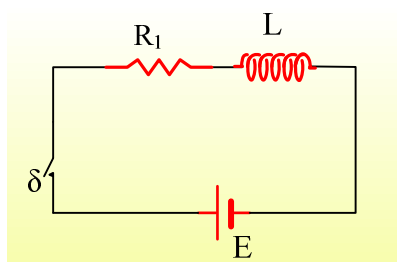
$$E - i_l R_l - V_{c2} = 0 \rightarrow \frac{dE}{dt} - \frac{di_l}{dt} \cdot R - \frac{dV_{c2}}{dt} = 0$$

$$0 - \frac{di_l}{dt} \cdot R - \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{di_l}{dt} = -\frac{1}{RC} i_l = -\frac{1}{10 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} 5 \cdot 10^{-3} \text{ A/s} = -5 \cdot 10^{-3} \text{ A/s}$$

Σχόλιο.

Μήπως όλα αυτά σας θυμίζουν λίγο ασκήσεις με κυκλώματα με πηνίο; Αν ναι, σωστά σας τα θυμίζουν, αφού και τα μεν και τα δε, περιγράφονται από ανάλογες διαφορικές εξισώσεις.



Έτσι σε ένα απλό κύκλωμα με αντίσταση και πηνίο, όπως το πρώτο παραπάνω, ο 2^{ος} Κ.Κ δίνει:

$$E - iR - L \frac{di}{dt} = 0$$

Η οποία οδηγεί σε λύση της μορφής:

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}} \right)$$

Ενώ στο αντίστοιχο κύκλωμα με πυκνωτή, δίπλα:

$$E - iR - \frac{1}{C} q = 0 \rightarrow E - \frac{1}{C} q - R \frac{dq}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$q = EC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Με αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις:

