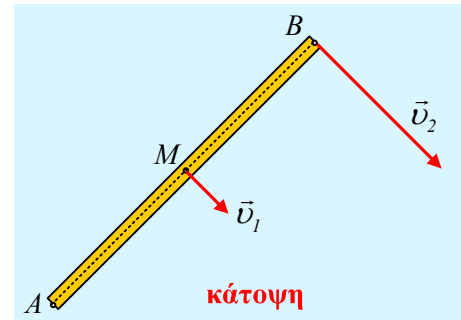


Δύο διαφορετικές οπτικές

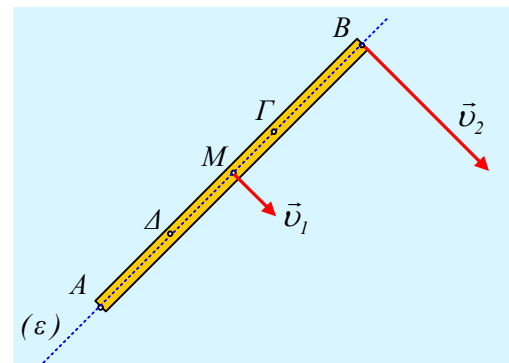
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται οριζόντια μια ομογενής δοκός AB, μήκους $l=1\text{m}$ και σε μια στιγμή t το μέσον της M και το άκρο της B έχουν ταχύτητες κάθετες στην AB με μέτρα $v_1=1\text{m/s}$ και $v_2=3\text{m/s}$ αντίστοιχα.



- i) Ο μαθητής A υποστηρίζει ότι η δοκός εκτελεί στροφική κίνηση γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z_1 . Με βάση αυτή την υπόθεση, καλείται να απαντήσει στα παρακάτω ερωτήματα, δίνοντας και σύντομες δικαιολογήσεις:
 - α) Ο άξονας z_1 περνά από κάποιο σημείο της δοκού ή μπορεί να περνά από σημείο, έξω από την δοκό;
 - β) Ο άξονας z_1 περνά από ένα σημείο P, μεταξύ των M και B ή όχι;
 - γ) Ποια η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της δοκού;
 - δ) Ποια η ταχύτητα του άκρου A της δοκού τη στιγμή t ;
- ii) Ο μαθητής B, υποστηρίζει ότι η ράβδος εκτελεί σύνθετη κίνηση, μια μεταφορική με ταχύτητα v_1 , την ταχύτητα του κέντρου μάζας M και μια στροφική γύρω από κατακόρυφο άξονα z_2 , ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας M. Με βάση την υπόθεση αυτή, καλείται να απαντήσει στα ερωτήματα για τη στιγμή t :
 - α) Ποια η γωνιακή ταχύτητα της δοκού;
 - β) Ποια η ταχύτητα του άκρου A της δοκού;
- iii) Ποιος μαθητής έχει δίκιο στην θέση που υποστηρίζει;

Απάντηση:

- i) Αν η δοκός εκτελεί στροφική κίνηση, γύρω από έναν σταθερό άξονα, τότε κάθε σημείο της εκτελεί κυκλική κίνηση και η ταχύτητά του θα είναι μια γραμμική ταχύτητα, κάθετη στην ακτίνα.

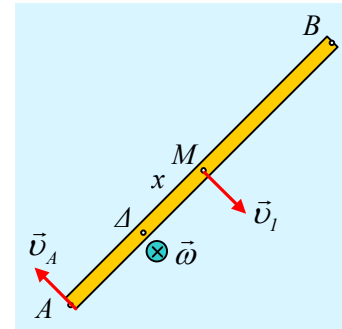


- α) Αλλά τότε το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, που διαγράφει κάθε σημείο, είναι πάνω στην κοινή κάθετο των δύο ταχυτήτων, βρίσκεται δηλαδή πάνω στην ευθεία (ε) του διπλανού σχήματος, χωρίς να εξαιρούνται σημεία της ευθείας, έξω από τη δοκό.
- β) Αν υποθέσουμε ότι ο κατακόρυφος άξονας περιστροφής περνά από το σημείο Γ, του παραπάνω σχήματος, τότε τα σημεία M και B θα είχαν ταχύτητες με αντίθετες κατευθύνσεις, πράγμα που δεν συμβαίνει. Κατά συνέπεια ο άξονας z_1 δεν περνά από κάποιο σημείο μεταξύ M και B.
- γ) Με βάση την προηγούμενη απάντηση ο άξονας z_1 περνά από ένα σημείο της ευθείας (ε) το οποίο θα είναι πιο κοντά στο M, από ότι στο B, αφού $v_2=\omega R_2 > v_1=\omega R_1$, συνεπώς $R_2 > R_1$. Έστω λοιπόν ότι ο άξονας περνά από το σημείο Δ, όπου $(\Delta M)=x$. Τότε για τις δυο ταχύτητες θα ισχύει:

$$v_1 = \omega \cdot x \quad \text{και} \quad v_2 = \omega \cdot \left(x + \frac{l}{2} \right) \rightarrow$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\omega \cdot \left(x + \frac{l}{2} \right)}{\omega \cdot x} \rightarrow \frac{3}{1} = \frac{x + \frac{l}{2}}{x} \rightarrow 3x = x + \frac{l}{2} \rightarrow x = \frac{l}{4} = 0,25m \rightarrow$$

$$\omega = \frac{v_1}{x} = \frac{l}{0,25} \text{rad} / s = 4 \text{rad} / s$$



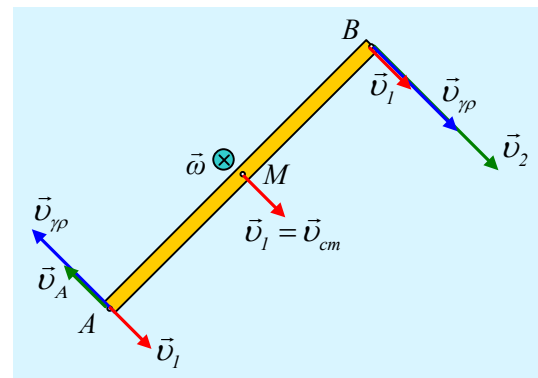
δ) Το άκρο A, με βάση τα παραπάνω έχει ταχύτητα v_A , κάθετη στην ακτίνα

περιφοράς $(A\Delta) = \frac{l}{2} - x = \frac{l}{2} - \frac{l}{4} = \frac{l}{4}$, με μέτρο:

$$v_A = \omega \cdot \frac{l}{4} = 4 \cdot \frac{l}{4} \text{m} / s = l \text{m} / s$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το Δ, το σημείο που περνάει ο άξονας περιστροφής z_1 , είναι το μέσον της AM, οπότε οι ταχύτητες των σημείων A και M έχουν το ίδιο μέτρο αφού τα σημεία κινούνται στον ίδιο κύκλο κέντρου Δ και ακτίνας $R = \frac{1}{4} l$.

ii) Σύμφωνα με τον B μαθητή, η δοκός εκτελεί σύνθετη κίνηση, όπου όσον αφορά την μεταφορική κίνηση αυτή πραγματοποιείται με ταχύτητα v_1 , οπότε κάθε σημείο (εκτός του κέντρου μάζας M) θα έχει την ταχύτητα αυτή, συν μια γραμμική ταχύτητα εξαιτίας της στροφικής κίνησης, γύρω από τον κατακόρυφο άξονα z_2 , ο οποίος περνά από το μέσον M της δοκού. Αλλά αν η ταχύτητα του B είναι μεγαλύτερη της v_{cm} , αυτό σημαίνει ότι η γραμμική ταχύτητα του B έχει την ίδια κατεύθυνση και η γωνιακή ταχύτητα είναι αυτή του διπλανού σχήματος, πάνω στον άξονα z_2 , κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, με φορά προς τα μέσα.



α) Με βάση τα παραπάνω, για την ταχύτητα του άκρου B θα έχουμε:

$$v_B = v_2 = v_{cm} + v_{\gamma\rho} = v_1 + \omega \cdot \frac{l}{2} \rightarrow \omega = \frac{2(v_2 - v_1)}{l} \rightarrow$$

$$\omega = \frac{2(v_2 - v_1)}{l} = \frac{2(3 - l)}{l} \text{rad} / s = 4 \text{rad} / s$$

β) Ενώ για την ταχύτητα του άκρου A, με την βοήθεια και του παραπάνω σχήματος, θα έχουμε:

$$v_A = v_{\gamma\rho} - v_{cm} = \omega \cdot \frac{l}{2} - v_1 = 4 \cdot \frac{l}{2} \text{m} / s - l \text{m} / s = l \text{m} / s$$

Με κατεύθυνση, όπως στο σχήμα (κάθετη στη δοκό, με φορά αντίθετη της ταχύτητας του κέντρου μάζας M)

iii) Από την σύγκριση των παραπάνω αποτελεσμάτων για γωνιακή ταχύτητα και ταχύτητα του άκρου A, προκύπτει ότι και οι δύο μαθητές βρήκαν τα ίδια αποτελέσματα, παρότι θεώρησαν διαφορετική κίνηση. Ο A

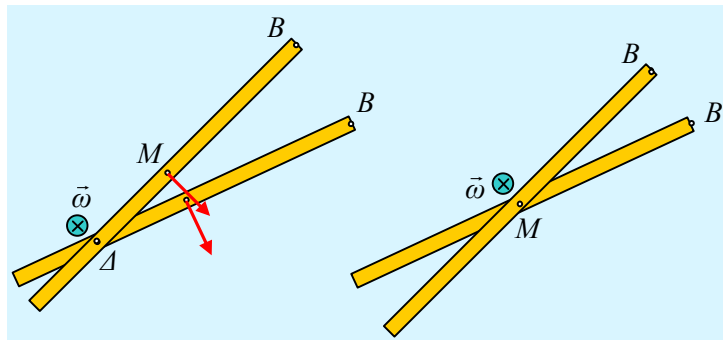
θεώρησε την κίνηση μόνο στροφική, «βλέποντας» έναν σταθερό άξονα ο οποίος περνάει από το μέσον της απόστασης AM , ο μαθητής B θεώρησε την κίνηση σύνθετη, με περιστροφή γύρω από νοητό άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας M , το οποίο κινείται με ταχύτητα v_1 .

Αρκεί να προσέξουμε το ρήμα που επαναλαμβάνεται παραπάνω. «**Θεώρησε**»! Και ο μαθητής A και ο μαθητής B , **θεώρησαν**!

Η κίνηση της ράβδου είναι μία, αυτή που είναι. Για να την μελετήσουμε μπορούμε ισοδύναμα να χρησιμοποιήσουμε είτε την μία πορεία, είτε την άλλη.

Σχόλιο:

Αξίζει να τονισθεί ότι η γωνιακή ταχύτητα συνδέεται με την αλλαγή του προσανατολισμού της δοκού, οπότε αν πάρουμε δύο θέσεις της που διαφέρουν κατά Δt , όπως στο σχήμα, η γωνία που έχει στραφεί η δοκός είναι ίδια, είτε κάποιος θεωρήσει ότι στρέφεται γύρω από το Δ , είτε γύρω από το κέντρο μάζας M . Συνεπώς θα έχουμε την ίδια γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στερεού!



dmargaris@gmail.com